Subtraction Games

§7.6 uit Lessons in Play, Second Edition

Ludo Pulles, Universiteit Leiden.

12 mei 2020

Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Eindige subtraction games

Definitie

Een *subtraction game* wordt gespeeld op één of meerdere nim-stapels waarin spelers om beurten $s \in S$ van één stapel af moeten halen, waarbij $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$ vastgekozen is.

- SUBTRACTION$(a_1, a_2, \dots, a_k)$ is een subtraction game met $S = \{a_1, \dots, a_k\}$.
- ALLBUT$(a_1, a_2, \dots, a_k)$ is een subtraction game met $S = \{1, 2, \dots\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$.

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(2, 4, 7)$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex} \{ \mathcal{G}(n - s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{ 2, 4, 7 \} \} .$$

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{mex}\,\{\, \mathcal{G}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{s}) \mid \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{n} \text{ en } \boldsymbol{s} \in \{\, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7} \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0												

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \mathbf{mex}\,\{\, \mathcal{G}(n - s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1											

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(2, 4, 7)$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex}\{\,\mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\,2,4,7\,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1										

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex}\{\,\mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\,2, 4, 7\,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2									

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex}\{\, \mathcal{G}(n - s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2								

Eindige subtraction games

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{mex}\,\{\, \mathcal{G}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{s}) \mid \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{n} \text{ en } \boldsymbol{s} \in \{\, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7} \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0							

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(2, 4, 7)$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex} \{ \mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{ 2, 4, 7 \} \} .$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3						

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex} \{ \mathcal{G}(n - s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{ 2, 4, 7 \} \}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1					

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}\,\{\, \mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0				

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \mathbf{mex}\,\{\, \mathcal{G}(n - s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2			

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex}\{\, \mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\}\,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1		

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex}\{\, \mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\}\,\}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1	0	

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$.

$$\mathcal{G}(n) = \mathrm{mex}\,\{\, \mathcal{G}(n - s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\} \,\}\,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1	0	2...

Opgave (7.2(a))

Bereken de Grundy-waardes voor SUBTRACTION$(2, 4, 7)$.

$$\mathcal{G}(n) = \operatorname{mex} \{\, \mathcal{G}(n-s) \mid s \leq n \text{ en } s \in \{\, 2, 4, 7 \,\} \,\} \,.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1	0	2...

Bovenstaand spel lijkt periodiek.

Notatie: $(\mathcal{G}(n))_{n \geq 0} = 00112203\dot{1}0\dot{2}$.

Definitie

Een rij $(\mathcal{G}(n))_{n\geq 0}$ is (ℓ, p)-*periodiek* met preperiode $\ell \geq 0$ en periode $p > 0$, als,

$$\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) \qquad (\forall n \geq \ell).$$

Definitie

Een rij $(\mathcal{G}(n))_{n\geq 0}$ is (ℓ, p)-*periodiek* met preperiode $\ell \geq 0$ en periode $p > 0$, als,

$$\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) \qquad (\forall n \geq \ell).$$

Stelling (Theorem 7.33)

De Grundy-waardes van SUBTRACTION$(a_1, \ldots, a_k)$ *zijn periodiek.*

Bewijs.

Positie $\boldsymbol{n}$ heeft maximaal $\boldsymbol{k}$ opties, dus $\mathcal{G}(\boldsymbol{n}) \leq \boldsymbol{k}$.

Bewijs.

Positie n heeft maximaal k opties, dus $\mathcal{G}(n) \leq k$.
Neem $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$. Omdat er hoogstens $(k+1)^a$ manieren zijn voor a opeenvolgende Grundy getallen $\mathcal{G}(n), \ldots, \mathcal{G}(n+a-1)$, bestaan er $q, r \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $0 \leq q < r \leq (k+1)^a$, en

$$\mathcal{G}(q+i) = \mathcal{G}(r+i), \qquad (\forall i \in \{0, \ldots, a-1\}).$$

Bewijs.

Positie n heeft maximaal k opties, dus $\mathcal{G}(n) \leq k$.
Neem $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$. Omdat er hoogstens $(k+1)^a$ manieren zijn voor a opeenvolgende Grundy getallen $\mathcal{G}(n), \ldots, \mathcal{G}(n+a-1)$, bestaan er $q, r \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $0 \leq q < r \leq (k+1)^a$, en

$$\mathcal{G}(q+i) = \mathcal{G}(r+i), \qquad (\forall i \in \{0, \ldots, a-1\}).$$

Met inductie gaan we nu bewijzen dat $\mathcal{G}(q+t) = \mathcal{G}(r+t)$ voor alle $t \geq 0$.
Basisstap: $0 \leq t \leq a-1$.

Bewijs.

Positie n heeft maximaal k opties, dus $\mathcal{G}(n) \leq k$.
Neem $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$. Omdat er hoogstens $(k+1)^a$ manieren zijn voor a opeenvolgende Grundy getallen $\mathcal{G}(n), \ldots, \mathcal{G}(n+a-1)$, bestaan er $q, r \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $0 \leq q < r \leq (k+1)^a$, en

$$\mathcal{G}(q+i) = \mathcal{G}(r+i), \qquad (\forall i \in \{0, \ldots, a-1\}).$$

Met inductie gaan we nu bewijzen dat $\mathcal{G}(q+t) = \mathcal{G}(r+t)$ voor alle $t \geq 0$.
Basisstap: $0 \leq t \leq a-1$.
Inductiestap: Stel $t \geq a$ en $\mathcal{G}(q+s) = \mathcal{G}(r+s) \quad \forall s < t$. Dan geldt,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(r+t) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(r+t-a_i) \mid 1 \leq i \leq k\} \\ &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(q+t-a_i) \mid 1 \leq i \leq k\} = \mathcal{G}(q+t).\end{aligned}$$

Dus de Grundy-waardes zijn $(q, r-q)$-periodiek. $\square$

Gevolg

Neem het spel SUBTRACTION$(a_1, \ldots, a_k)$*, en laat* $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$*. Als voor zekere* $\ell \geq 0, p > 0$ *geldt dat* $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p)$ *voor alle* $n \in \{\ell, \ldots, \ell + a - 1\}$*, dan is het spel periodiek met deze* ℓ, p *als in de definitie.*

Gevolg

Neem het spel SUBTRACTION$(a_1, \ldots, a_k)$*, en laat* $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$*. Als voor zekere* $\ell \geq 0, p > 0$ *geldt dat* $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p)$ *voor alle* $n \in \{\ell, \ldots, \ell + a - 1\}$*, dan is het spel periodiek met deze* ℓ, p *als in de definitie.*

Om te bevestigen dat bepaalde ℓ en p ‘werken’, is het dus voldoende om

$$\mathcal{G}(\ell), \ldots, \mathcal{G}(\ell + p + a - 1),$$

te berekenen.

Gevolg

Neem het spel SUBTRACTION$(a_1, \ldots, a_k)$*, en laat* $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$*. Als voor zekere* $\ell \geq 0, p > 0$ *geldt dat* $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p)$ *voor alle* $n \in \{\ell, \ldots, \ell + a - 1\}$*, dan is het spel periodiek met deze* ℓ, p *als in de definitie.*

Om te bevestigen dat bepaalde ℓ en p ‘werken’, is het dus voldoende om

$$\mathcal{G}(\ell), \ldots, \mathcal{G}(\ell + p + a - 1),$$

te berekenen.
Gegeven een (ℓ, p)-periodieke rij, kun je de minimale pre-periode ℓ' en minimale periode p' met de computer “efficiënt” bepalen.

Opmerkingen

Er zijn nog diverse open vragen:

- Hoe groot kan de (minimale) periode worden van een SUBTRACTION$(a_1, \ldots, a_k)$ spel als functie van de $\{ a_i \}$?

[1] N. B. Ho, "On the expansion of three-element subtraction sets," Theoretical Computer Science, vol. 582, pp. 35–47, 2015.

Opmerkingen

Er zijn nog diverse open vragen:

- Hoe groot kan de (minimale) periode worden van een SUBTRACTION$(a_1, \ldots, a_k)$ spel als functie van de $\{ a_i \}$? Bijvoorbeeld,

$$\textsc{subtraction}(2,3,4,7,8,10,13,14,16,17) \text{ heeft } (\ell, p) = (214, 306),$$
$$\textsc{subtraction}(2,3,5,6,9,11,12,13,15,18) \text{ heeft } (\ell, p) = (271, 420).$$

[1] N. B. Ho, "On the expansion of three-element subtraction sets," Theoretical Computer Science, vol. 582, pp. 35–47, 2015.

Opmerkingen

Er zijn nog diverse open vragen:

- Hoe groot kan de (minimale) periode worden van een SUBTRACTION$(a_1, \dots, a_k)$ spel als functie van de $\{ a_i \}$? Bijvoorbeeld,

$$\text{SUBTRACTION}(2, 3, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17) \text{ heeft } (\ell, p) = (214, 306),$$
$$\text{SUBTRACTION}(2, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 15, 18) \text{ heeft } (\ell, p) = (271, 420).$$

- Is er een algemene beschrijving van de Grundy-waardes van SUBTRACTION(a_1, a_2, a_3)?
  Speciale gevallen zijn al geanalyseerd[1], zoals SUBTRACTION$(1, a, b)$ en SUBTRACTION$(a, b, a + b)$.

[1] N. B. Ho, "On the expansion of three-element subtraction sets," Theoretical Computer Science, vol. 582, pp. 35–47, 2015.

Stelling (Theorem 7.36)

Zij $G = \textsc{subtraction}(a_1, \ldots, a_k)$ *een subtraction game met* $\ell = 0$ *periode* p, *en* $H = \textsc{subtraction}(a_1, \ldots, a_k, a_1 + mp)$ *voor een zekere* $m \geq 0$. *Dan hebben* G *en* H *dezelfde Grundy-waardes.*

Stelling (Theorem 7.36)

Zij $\boldsymbol{G} = \textsc{subtraction}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$ *een subtraction game met* $\ell = \mathbf{0}$ *periode* $\boldsymbol{p}$, *en* $\boldsymbol{H} = \textsc{subtraction}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{mp})$ *voor een zekere* $\boldsymbol{m} \geq \mathbf{0}$. *Dan hebben* $\boldsymbol{G}$ *en* $\boldsymbol{H}$ *dezelfde Grundy-waardes.*

Lemma (Winning Ways Vol. 1, p. 84)

Zij $\boldsymbol{G} = \textsc{subtraction}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$ *een subtraction game en* $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$. *Als voor alle* $\boldsymbol{n} \geq 0$, $\mathcal{G}(\boldsymbol{n}) \neq \mathcal{G}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a})$, *dan hebben* $\boldsymbol{G}$ *en* $\boldsymbol{G'} = \textsc{subtraction}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{a})$ *dezelfde Grundy-waardes.*

Stelling (Theorem 7.36)

Zij $G = \textsc{subtraction}(a_1, \ldots, a_k)$ *een subtraction game met* $\ell = 0$ *periode* p, *en* $H = \textsc{subtraction}(a_1, \ldots, a_k, a_1 + mp)$ *voor een zekere* $m \geq 0$. *Dan hebben* G *en* H *dezelfde Grundy-waardes.*

Lemma (Winning Ways Vol. 1, p. 84)

Zij $G = \textsc{subtraction}(a_1, \ldots, a_k)$ *een subtraction game en* $a > 0$. *Als voor alle* $n \geq 0$, $\mathcal{G}(n) \neq \mathcal{G}(n + a)$, *dan hebben* G *en* $G' = \textsc{subtraction}(a_1, \ldots, a_k, a)$ *dezelfde Grundy-waardes.*

Bewijs (lemma).

Duidelijk: $\mathcal{G}'(n) = \mathcal{G}(n)$ voor $n < a$. Met inductie op n, is $\mathcal{G}'(n - a) \neq \mathcal{G}(n)$ dus $\mathcal{G}'(n) = \mathcal{G}(n)$. $\square$

Definitie

ALLBUT$(a_1, \ldots, a_k)$ is een NIM spel waar spelers $s \in S = \{\, 1, 2, \ldots \,\} \setminus \{\, a_1, \ldots, a_k \,\}$ van één stapel af moeten halen.

Definitie

ALLBUT$(a_1, \ldots, a_k)$ is een NIM spel waar spelers $s \in S = \{1, 2, \ldots\} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ van één stapel af moeten halen.

Voorbeeld

Neem $G =$ ALLBUT$(2, 3, 4)$. Dan zijn de Grundy-waardes:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{G}(n)$	0	1	0	1	0	1									

Definitie

ALLBUT$(a_1, \ldots, a_k)$ is een NIM spel waar spelers $s \in S = \{ 1, 2, \ldots \} \setminus \{ a_1, \ldots, a_k \}$ van één stapel af moeten halen.

Voorbeeld

Neem $G =$ ALLBUT$(2, 3, 4)$. Dan zijn de Grundy-waardes:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{G}(n)$	0	1	0	1	0	1	2	3	2	3	2	3			

Definitie

$\text{ALLBUT}(a_1, \ldots, a_k)$ is een NIM spel waar spelers
$s \in S = \{1, 2, \ldots\} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ van één stapel af moeten halen.

Voorbeeld

Neem $G = \text{ALLBUT}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$. Dan zijn de Grundy-waardes:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{G}(n)$	0	1	0	1	0	1	2	3	2	3	2	3	4	5	4...

Zo te zien kunnen we niet verwachten dat deze spellen periodiek zijn.

Lemma ('Stijglemma', Lemma 7.38)

Zij $\boldsymbol{G} = \textsc{allbut}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$ *en* $\boldsymbol{a} = \max\{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}\}$. *Dan,*

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}) > \mathcal{G}(\boldsymbol{n}), \qquad (\forall \boldsymbol{t} > \boldsymbol{a}).$$

Lemma (‘Stijglemma’, Lemma 7.38)

Zij $G = \textsc{allbut}(a_1, \ldots, a_k)$ *en* $a = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$. *Dan,*

$$\mathcal{G}(n+t) > \mathcal{G}(n), \qquad (\forall t > a).$$

Bewijs.

Elke optie van n is ook een optie van $n+t$, dus $\mathcal{G}(n+t) \geq \mathcal{G}(n)$. Omdat n een optie vanuit $n+t$ is, is $\mathcal{G}(n+t) \neq \mathcal{G}(n)$. □

Definitie

Een rij $n_1, n_2, \ldots,$ is *(ℓ, p, s)-rekenkundig periodiek* met preperiode $\ell \geq 0$, periode $p > 0$ en sprong ('saltus') $s \geq 0$, als,

$$\mathcal{G}(n + p) = \mathcal{G}(n) + s, \qquad (\forall n \geq \ell).$$

Voorbeeld

De Grundy-waardes van ALLBUT$(2, 3, 4)$ zijn:

$$010101\,232323\,454545\cdots = \dot{0}1010\dot{1}(+2),$$

waarbij de periode vanaf de eerste punt tot de tweede punt loopt ($\ell = 0, p = 6$), en de sprong $+2$ is.

Tweede Periodiciteitsstelling

Stelling (Theorem 7.39)

Zij $\boldsymbol{G} = \textsc{allbut}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$. *De Grundy-waardes van* $\boldsymbol{G}$ *spel is rekenkundig periodiek.*

Tweede Periodiciteitsstelling

Stelling (Theorem 7.39)

Zij $\boldsymbol{G} = \textsc{allbut}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$. *De Grundy-waardes van* $\boldsymbol{G}$ *spel is rekenkundig periodiek.*

Het bewijs bestaat uit meerdere onderdelen:

1. De ‘verschilrij’ $\boldsymbol{\mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n)}$ is begrensd.
2. De verschilrij heeft een repeterend deel.
3. Als de lengte van een repeterend deel lang genoeg is, gaat dit oneindig door.

Tweede Periodiciteitsstelling - Stap 1

De 'verschilrij' $\mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n)$ is begrensd:

Lemma (Lemma 7.40)

Zij $G = \text{ALLBUT}(a_1, \ldots, a_k)$ *met* $a_1 < a_2 < \cdots < a_k = a$. *Dan geldt voor* $n > a$,

$$-(a-k) \leq \mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n) \leq (a-k) + 1.$$

Bewijs.

Neem $n > a$, en per definitie is $\mathcal{G}(n) = \mathbf{mex}\, X$, met

$$X = \{\, \mathcal{G}(i) \mid 0 \leq i < n - a \,\} \cup \{\, \mathcal{G}(n - \alpha) \mid 1 \leq \alpha \leq a, \alpha \notin \{\, a_1, \ldots, a_k \,\} \,\}.$$

En, $\{\, 0, 1, \ldots, \mathcal{G}(n) - 1 \,\} \subseteq X$.

Bewijs.

Neem $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{a}$, en per definitie is $\mathcal{G}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{mex}\, \boldsymbol{X}$, met

$$\boldsymbol{X} = \{\, \mathcal{G}(\boldsymbol{i}) \mid 0 \leq \boldsymbol{i} < \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a} \,\} \cup \{\, \mathcal{G}(\boldsymbol{n} - \alpha) \mid 1 \leq \alpha \leq \boldsymbol{a}, \alpha \notin \{\, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \,\} \,\}\,.$$

En, $\{\, 0, 1, \ldots, \mathcal{G}(\boldsymbol{n}) - 1 \,\} \subseteq \boldsymbol{X}$.
De rechter verzameling bevat maximaal $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{k}$ elementen, dus moet er een index $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}$ zijn in de linker verzameling met

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{m}) \geq \mathcal{G}(\boldsymbol{n}) - 1 - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{k}).$$

Bewijs.

Neem $n > a$, en per definitie is $\mathcal{G}(n) = \mathbf{mex}\, X$, met

$$X = \{\, \mathcal{G}(i) \mid 0 \le i < n - a \,\} \cup \{\, \mathcal{G}(n - \alpha) \mid 1 \le \alpha \le a, \alpha \notin \{\, a_1, \ldots, a_k \,\} \,\}.$$

En, $\{\, 0, 1, \ldots, \mathcal{G}(n) - 1 \,\} \subseteq X$.
De rechter verzameling bevat maximaal $a - k$ elementen, dus moet er een index $m < n - a$ zijn in de linker verzameling met

$$\mathcal{G}(m) \ge \mathcal{G}(n) - 1 - (a - k).$$

Nu is $\mathcal{G}(n + 1) > \mathcal{G}(m)$ want elke $i < m$ is een optie vanuit $n + 1$, en alle waardes $\le \mathcal{G}(m)$ komen hier tussen voor.
Kortom $\mathcal{G}(n + 1) \ge \mathcal{G}(n) - (a - k)$.

Bewijs.

Neem $n > a$, en per definitie is $\mathcal{G}(n) = \mathbf{mex}\, X$, met

$$X = \{\, \mathcal{G}(i) \mid 0 \le i < n - a \,\} \cup \{\, \mathcal{G}(n-\alpha) \mid 1 \le \alpha \le a, \alpha \notin \{\, a_1, \ldots, a_k \,\} \,\}.$$

En, $\{\, 0, 1, \ldots, \mathcal{G}(n) - 1 \,\} \subseteq X$.
De rechter verzameling bevat maximaal $a - k$ elementen, dus moet er een index $m < n - a$ zijn in de linker verzameling met

$$\mathcal{G}(m) \ge \mathcal{G}(n) - 1 - (a - k).$$

Nu is $\mathcal{G}(n+1) > \mathcal{G}(m)$ want elke $i < m$ is een optie vanuit $n + 1$, en alle waardes $\le \mathcal{G}(m)$ komen hier tussen voor.
Kortom $\mathcal{G}(n+1) \ge \mathcal{G}(n) - (a - k)$.
Vergelijkbaar is er een $m' < n - a$ zodat $\mathcal{G}(m') > \mathcal{G}(n+1) - 2 - (a - k)$ waardoor

$$\mathcal{G}(n) \ge 1 + \mathcal{G}(m') \ge \mathcal{G}(n+1) - 1 - (a - k).$$

$\square$

Tweede Periodiciteitsstelling - Stap 2

De verschilrij heeft een repeterend deel:

Lemma (Lemma 7.41)

Met de notatie als hiervoor, bestaan er $\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$ *en* $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$ *zodanig dat*

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{s}, \qquad (\forall \boldsymbol{n} \in \{\, \boldsymbol{n_0}, \ldots, \boldsymbol{n_0} + \mathbf{2}\boldsymbol{a} \,\}).$$

Bewijs.

Uit voorgaand lemma, kunnen we concluderen dat de functie,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}\colon \mathbb{Z}_{>a} &\to \{-(a-k), \ldots, a-k+1\}^{2a}, \\ n &\mapsto \Big(\mathcal{G}(n+1)-\mathcal{G}(n), \ldots, \mathcal{G}(n+2a+1)-\mathcal{G}(n+2a)\Big), \end{aligned}$$

goed gedefinieerd is.

Bewijs.

Uit voorgaand lemma, kunnen we concluderen dat de functie,

$$\begin{aligned} C\colon \mathbb{Z}_{>a} &\to \{\,-(a-k),\ldots,a-k+1\,\}^{2a}, \\ n &\mapsto \Big(\mathcal{G}(n+1)-\mathcal{G}(n),\ldots,\mathcal{G}(n+2a+1)-\mathcal{G}(n+2a)\Big), \end{aligned}$$

goed gedefinieerd is.
De functie is *niet* injectief, dus zijn er $n_0, n_0' > a$ waarvoor $n_0 < n_0'$ en $C(n_0) = C(n_0')$. Neem nu $p = n_0' - n_0$ en $s = \mathcal{G}(n_0') - \mathcal{G}(n_0)$.

Bewijs.

Uit voorgaand lemma, kunnen we concluderen dat de functie,

$$\begin{aligned} C\colon \mathbb{Z}_{>a} &\to \{-(a-k),\dots,a-k+1\}^{2a}, \\ n &\mapsto \Big(\mathcal{G}(n+1)-\mathcal{G}(n),\dots,\mathcal{G}(n+2a+1)-\mathcal{G}(n+2a)\Big), \end{aligned}$$

goed gedefinieerd is.
De functie is *niet* injectief, dus zijn er $n_0, n_0' > a$ waarvoor $n_0 < n_0'$ en $C(n_0) = C(n_0')$. Neem nu $p = n_0' - n_0$ en $s = \mathcal{G}(n_0') - \mathcal{G}(n_0)$.
Het lemma volgt, bijvoorbeeld voor $n = n_0 + 1$:

$$\mathcal{G}(n_0+1+p) = \mathcal{G}(n_0+p) + (\mathcal{G}(n_0+1) - \mathcal{G}(n_0)) = \mathcal{G}(n_0+1) + s.$$

$\square$

Als de lengte van een repeterend deel lang genoeg is, gaat dit oneindig door:

Lemma (Lemma 7.43)

Met de notatie als hiervoor, als voor $\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$ *en* $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$*, geldt dat,*

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{s}, \qquad (\forall \boldsymbol{n_0} \leq \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{n_0} + \mathbf{2}\boldsymbol{a}),$$

dan is $\boldsymbol{G}$ $(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})$*-rekenkundig periodiek, oftewel,*

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{s}, \qquad (\forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}).$$

Als de lengte van een repeterend deel lang genoeg is, gaat dit oneindig door:

Lemma (Lemma 7.43)

Met de notatie als hiervoor, als voor $n_0, s \geq 0$ *en* $p > 0$, *geldt dat,*

$$\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) + s, \qquad (\forall n_0 \leq n \leq n_0 + 2a),$$

dan is G (n_0, p, s)*-rekenkundig periodiek, oftewel,*

$$\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) + s, \qquad (\forall n \geq n_0).$$

In het bijzonder is (ℓ, p, s)-rekenkundige periodiciteit te bewijzen, door alleen de waardes van $\mathcal{G}(n)$ te berekenen voor $0 \leq n \leq \ell + 2a + p$.

Bewijs.

Als het bewezen is voor $n = n_0 + 2a + 1$ kunnen we dit resultaat gebruiken door n_0 te vervangen door $n_0 + 1$, $n_0 + 2$, etc. waardoor het lemma bewezen is.

Bewijs.

Als het bewezen is voor $n = n_0 + 2a + 1$ kunnen we dit resultaat gebruiken door n_0 te vervangen door $n_0 + 1, n_0 + 2$, etc. waardoor het lemma bewezen is.
Door het Stijglemma twee keer toe te passen, vinden we voor alle $m < n_0 + p$,

$$\mathcal{G}(m) < \mathcal{G}(n_0 + a + p) < \mathcal{G}(n + p).$$

Bewijs.

Als het bewezen is voor $n = n_0 + 2a + 1$ kunnen we dit resultaat gebruiken door n_0 te vervangen door $n_0 + 1, n_0 + 2$, etc. waardoor het lemma bewezen is.
Door het Stijglemma twee keer toe te passen, vinden we voor alle $m < n_0 + p$,

$$\mathcal{G}(m) < \mathcal{G}(n_0 + a + p) < \mathcal{G}(n + p).$$

Dus, is $\mathcal{G}(n + p)$ de kleinste waarde groter dan $\mathcal{G}(n_0 + a + p)$ die niet voorkomt in de toegestane waardes van $\mathcal{G}(n_0 + p), \ldots, \mathcal{G}(n_0 + p + 2a)$.

Bewijs.

Als het bewezen is voor $n = n_0 + 2a + 1$ kunnen we dit resultaat gebruiken door n_0 te vervangen door $n_0 + 1, n_0 + 2$, etc. waardoor het lemma bewezen is.
Door het Stijglemma twee keer toe te passen, vinden we voor alle $m < n_0 + p$,

$$\mathcal{G}(m) < \mathcal{G}(n_0 + a + p) < \mathcal{G}(n + p).$$

Dus, is $\mathcal{G}(n + p)$ de kleinste waarde groter dan $\mathcal{G}(n_0 + a + p)$ die niet voorkomt in de toegestane waardes van $\mathcal{G}(n_0 + p), \ldots, \mathcal{G}(n_0 + p + 2a)$.
Doordat dit nu een lokale uitspraak is, is $\mathcal{G}(n + p)$ de kleinste waarde groter dan $\mathcal{G}(n_0 + a) + s$ die niet voorkomt in de toegestane waardes van $\mathcal{G}(n_0) + s, \ldots, \mathcal{G}(n_0 + 2a) + s$, per aanname.

Bewijs.

Als het bewezen is voor $n = n_0 + 2a + 1$ kunnen we dit resultaat gebruiken door n_0 te vervangen door $n_0 + 1, n_0 + 2$, etc. waardoor het lemma bewezen is.
Door het Stijglemma twee keer toe te passen, vinden we voor alle $m < n_0 + p$,

$$\mathcal{G}(m) < \mathcal{G}(n_0 + a + p) < \mathcal{G}(n + p).$$

Dus, is $\mathcal{G}(n + p)$ de kleinste waarde groter dan $\mathcal{G}(n_0 + a + p)$ die niet voorkomt in de toegestane waardes van $\mathcal{G}(n_0 + p), \ldots, \mathcal{G}(n_0 + p + 2a)$.
Doordat dit nu een lokale uitspraak is, is $\mathcal{G}(n + p)$ de kleinste waarde groter dan $\mathcal{G}(n_0 + a) + s$ die niet voorkomt in de toegestane waardes van $\mathcal{G}(n_0) + s, \ldots, \mathcal{G}(n_0 + 2a) + s$, per aanname.
Kortom, $\mathcal{G}(n + p) = \mathcal{G}(n) + s$.

$\square$

Opgave (7.10)

Analyseer SUBTRACTION$(1, 2, 4, \ldots, 2^i \ldots)$.

Opgave (7.14)

Vind de Grundy-waardes voor ALLBUT(q, r), met $q < r$. *Hint:* Er zijn twee gevallen $r = 2q$ en $r \neq 2q$.

Opgave (7.10)

Analyseer SUBTRACTION$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \ldots, \mathbf{2}^{\boldsymbol{i}} \ldots)$.

Opgave (7.14)

Vind de Grundy-waardes voor ALLBUT$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$, met $\boldsymbol{q} < \boldsymbol{r}$. *Hint:* Er zijn twee gevallen $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{2}\boldsymbol{q}$.

Claim

Claim: SUBTRACTION$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \ldots, \mathbf{2}^{\boldsymbol{i}} \ldots)$ is als SUBTRACTION$(\mathbf{1}, \mathbf{2})$.

Opgave (7.10)

Analyseer SUBTRACTION$(1, 2, 4, \ldots, 2^i \ldots)$.

Opgave (7.14)

Vind de Grundy-waardes voor ALLBUT(q, r), met $q < r$. *Hint:* Er zijn twee gevallen $r = 2q$ en $r \neq 2q$.

Claim

Claim: SUBTRACTION$(1, 2, 4, \ldots, 2^i \ldots)$ is als SUBTRACTION$(1, 2)$.

Claim

Claim: ALLBUT$(q, 2q)$ is $(0, 3q, q)$-periodiek.
ALLBUT(q, r) is $(0, 2q, q)$-periodiek ($r \neq 2q$).

Tot slot

Tot slot: `https://projecteuler.net/problem=649`