Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 8

Opgave 55

a. Laat de aantallen operaties van A en B resp. $a(n)$ en $b(n)$ zijn, met n de grootte van de invoer. Dan doet C $c(n) = a(n) + b(n)$ operaties voor invoer n. Dit is hooguit $2a(n)$ (als $a(n) \geq b(n)$) of $2b(n)$ (als $b(n) \geq a(n)$). Gezien $a(n)$ en $b(n)$ polynomiaal zijn, is $c(n)$ dat ook.

b. A en B zijn polynomiaal begrensd, dus $A \in O(n^k)$ en $B \in O(n^\ell)$ voor constante k, ℓ. De grootte van de uitvoer van A is dan ook in $O(n^k)$. Dan geldt dat $B \circ A \in O((n^k)^\ell) = O(n^{k\ell})$. k en ℓ zijn constanten, dus $B \circ A \in O(n^m)$ voor een of andere constante m, dus $B \circ A$ is polynomiaal begrensd.

Opgave 10

We schrijven voor het gemak $a < b$ als $a \in O(b)$ en $a \equiv b$ als $a \in \Theta(b)$. Herschrijf eerst de volgende:

- $2^{\lg n} = n$
- $4^{\lg n} = n^2$ ($\log_4 n = \frac{\lg n}{\lg 4} = \frac{\lg n}{2} \Rightarrow \lg n = 2\log_4 n \Rightarrow 4^{\lg n} = 4^{2\log_4 n} = (4^{\log_4 n})^2 = n^2$)
- $\lg(n!) \in \Theta(n \lg n)$ (zie dictaat)
- $2^{2^{n+1}} = 2^{2\times 2^n} = 4^{2^n}$

Dan:

- polynomialen: $\frac{1}{n} < 1 < \sqrt{n} < n = 2^{\lg n} \equiv n + 9 < n^{1+\varepsilon} < n^2 = 4^{\lg n} \equiv n^2 + \lg n < n^3 < n^3 + n^7 + 8$
- logaritmen: $\ln \ln n < \sqrt{\lg n} < \lg n \equiv \log_3 n \equiv \ln n < \lg^2 n$
- exponentiëlen: $(\frac{3}{2})^n < 2^n < n2^n < e^n < n! < (n+1)! < 2^{2^n} < 2^{2^{n+1}}$
- overig: $n \lg n \equiv \lg(n!)$

Om alles aan elkaar te plakken:

- $1 < \ln \ln n < \lg^2 n < \sqrt{n}$
- $n^3 + n^7 + 8 < (\frac{3}{2})^n$
- $n < n \lg n < n^{1+\varepsilon}$

Opgave 45

a. Met subscripts: $7_a, 1_a, 3_a, 1_b, 2_a, 4_a, 5, 7_b, 2_b, 4_b, 3_b$. $k = 7$, en $C = 2, 2, 2, 2, 1, 0, 2$ na de eerste keer tellen. Na ophogen is $C = 2, 4, 6, 8, 9, 9, 11$. In volgorde krijg je dan de volgende toekenningen: $B[6] = 3_b, B[8] = 4_b, B[4] = 2_b, B[11] = 7_b, B[9] = 5, B[7] = 4_a, B[3] = 2_a, B[2] = 1_b, B[5] = 3_a, B[1] = 1_a, B[10] = 7_a$.

b. Het algoritme sorteert nog wel maar is niet stabiel. Probeer het maar eens.

Opgave 46

a.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{wet} & & \text{oog} & & \text{was} & & \text{het} \\
\text{zon} & & \text{zon} & & \text{pas} & & \text{kin} \\
\text{oor} & & \text{kin} & & \text{wet} & & \text{oog} \\
\text{kin} & & \text{zin} & & \text{het} & & \text{oor} \\
\text{was} & & \text{oor} & & \text{pet} & & \text{pas} \\
\text{het} & \longrightarrow & \text{was} & \longrightarrow & \text{kin} & \longrightarrow & \text{pet} \\
\text{oog} & & \text{pas} & & \text{zin} & & \text{was} \\
\text{pet} & & \text{wet} & & \text{oog} & & \text{wet} \\
\text{zin} & & \text{het} & & \text{zon} & & \text{zin} \\
\text{pas} & & \text{pet} & & \text{oor} & & \text{zon} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\text{sorteer op} & & \text{sorteer op} & & \text{sorteer op} & & \\
1^{\text{e}}\ \text{letter} & & 2^{\text{e}}\ \text{letter} & & 3^{\text{e}}\ \text{letter} & &
\end{array}
$$

b. Volledige inductie op i. Basisgeval is $i = 1$, werkt per definitie. Inductiehypothese: alle getallen staan w.b.t. de laatste $i-1$ cijfers in de juiste volgorde. Dan sorteren we op cijfer i, met een stabiele sorteermethode. Na dit stabiel sorteren staat het $i$de cijfer in de juiste volgorde, en omdat het stabiel was de laatste $i-1$ ook. Formeel, uit het ongerijmde: neem aan dat we twee getallen zijn waarvan het $i$de cijfer goed staat maar een $j$de cijfer ($j < i$) niet. Omdat het sorteren stabiel is en er wordt gesorteerd op het $i$de cijfer, is de onderlinge volgorde niet veranderd, dus stonden deze ook al fout in de vorige iteratie, wat in tegenspraak is met onze aanname.

Opgave 33

Neem je twee disjuncte verzamelingen knopen A en B, met $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ en $|B| = \lceil n/2 \rceil$, en neem de volgende graaf in gedachten: alle knopen in A zijn met elkaar verbonden, net als alle knopen in B. Er lopen geen verbindingen tussen A en B. Het kost minstens $|A| \times |B| = \lfloor n/2 \rfloor \times \lceil n/2 \rceil$ vragen om dat vast te stellen.