Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 3

Opgave 20

Zie uitwerking website

Opgave 5

d. Zie hoofdstuk 3.3 van het dictaat (beslissingsbomen, zoeken)

Opgave 27

a. Zie uitwerking website

b. Opties voor de vijf grootste waarden (ongeordend): $b = \binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$. Dan geldt $h \geq \lceil \lg b \rceil = \lceil \lg \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} \rceil = \lceil \lg(n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)) - \lg 120 \rceil = \lceil \lg n + \lg(n-1) + \lg(n-2) + \lg(n-3) + \lg(n-4) - \lg 120 \rceil \in \Theta(\lg n)$.

(alles na $h \geq \lceil \lg b \rceil = \lceil \lg \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} \rceil$ (of $h \geq \lceil \lg \binom{n}{5} \rceil$) is mooi meegenomen maar optioneel)

Worst case is h.

c. Manieren om twee gesorteerde rijtjes samen te voegen: $\binom{n+m}{n}$. (gelijk aan aantal Manhattan-paden door een grid van $n \times m$) (ratio: resulterende rijtje is $n+m$ lang, en wordt uniek bepaald door de posities van de n elementen van A; overigens ook door de posities van de m elementen van B, maar $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$)

Dan geldt $h \geq \lceil \lg b \rceil = \lceil \lg \binom{n+m}{n} \rceil$. Dat verder uitwerken is naar, dus niet nodig. Misschien interessant:

- $\lceil \lg \binom{n+m}{n} \rceil = \lceil \lg n + \lg(n-1) + \ldots + \lg(n-m) \rceil \leq \lceil m \lg n \rceil$, dus $h \in O(m \lg n)$
- $\lceil \lg \binom{n+m}{n} \rceil = \lceil \lg n + \lg(n-1) + \ldots + \lg(n-m) \rceil \geq \lceil m \lg(n-m) \rceil$, dus $h \in \Omega(m \lg(n-m)$
- preciezere afschatting: zie `https://math.stackexchange.com/questions/64716/approximating-the-logarithm-of-the-binomial-coefficient`

Worst case is h.

Opgave 22

a. Triviaal algoritme vergelijkt alle (ongeordende) paren in een of andere volgorde, doet dan 1 vergelijking in de best case (direct twee dezelfde) $\frac{1}{2}n(n-1)$ vergelijkingen in de worst case (allemaal verschillend, of laatst gecontroleerde paar is hetzelfde).

b. Adversary: geef telkens aan dat twee elementen verschillend zijn. Per vergelijking kan je dan precies één (ongeordend) paar afstrepen, en je hebt er $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Ad hoc: analoog aan 3e (zie uitwerking website), uit het ongerijmde. Stel er bestaat een algoritme dat in de worst case (strikt) minder dan $\frac{1}{2}n(n-1)$ vergelijkingen doet. In het bijzonder geldt dat voor het geval waarin alle elementen verschillend zijn. Er bestaat dus een rijtje B met allemaal verschillende elementen, waarvan (per pigeonhole-principe) ten minste één paar $B[i], B[j]$ niet wordt vergeleken. Dan construeren we een rijtje C:

$$C[k] = \begin{cases} B[k] & k \neq j \\ B[i] & k = j \end{cases}$$

Het algoritme is deterministisch en alle gedane vergelijkingen leveren hetzelfde resultaat op als voor B, dus het algoritme geeft voor C een verkeerde uitvoer (nml. dat alle elementen verschillend zijn).

c. Sorteren kan in $\Theta(n \lg n)$ en dan hoef je alleen nog $(n-1)$ buren te vergelijken.

Opgave 32

Voor maximum en minimum: zie hoofdstuk 6.5 van het dictaat. Aangepast aan alleen maximum: alleen interesse in N, W, V. Tabel blijft ongewijzigd (behalve dat alles met WV wegvalt). Beginsituatie is n van type N, en 0 van W en V. Eindsituatie is 0 van N, 1 van W en $n-1$ van V. Per vergelijking (ongeacht type) wordt V hooguit één opgehoogd, dus je hebt minstens $n-1$ vergelijkingen nodig om te komen op $n-1$ van V.