Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 2

Opgave 6

Zie uitwerking website

Opgave 8

a. Je moet elk element $A[i]$ vergelijken met elk element rechts ervan om te bepalen dat het het kleinste is. Totaal dus $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$. Dit gebeurt als A al oplopend is gesorteerd: als je ergens moet wisselen, wordt *Min* niet opgehoogd en moet je dus nog een iteratie doen van de buitenste loop.

b. In het ergste geval moet je elk element $A[i]$ wisselen met elk element $A[i+k]$ ($k > 0$), wat telkens k vergelijkingen kost, plus nog eens $n - i$ vergelijkingen om te bepalen dat $A[i]$ achteraf goed staat. Met de gesloten formules voor de sommaties (pagina 7 van het dictaat):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{j=1}^{i} j + i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(\frac{1}{2}i(i+1) + i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\frac{1}{2}i(i+3)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(i^2 + 3i) \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n-1} i) \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2 + 3(\sum_{i=1}^{n} i - n)) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - n^2 + 3(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - n)) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - n^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 3n) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n) \\
&= \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n
\end{aligned}$$

Om dit voor elkaar te krijgen, moet je de buitenste loop zo lang mogelijk rekken. Daarvoor moet je zo vaak mogelijk wisselen. M.a.w.: $A[i] < A[i+k]$ voor alle i en $k > 0$. M.a.w.: A is aflopend gesorteerd.

Opgave 17

a. 1, als $A[1] > A[i]$ voor alle $2 \leq i \leq n$.

b. n, als elke vergelijking een nieuwe toekenning oplevert. Dan geldt $A[i] < A[j]$ voor alle $1 \leq i < j \leq n$, d.w.z., A is oplopend gesorteerd.

Opgave 20

Zie uitwerking website

Opgave 19

a. Regels 3, 10 en 17 gebeuren elk precies $\frac{n}{2}$ keer (want n is even) $\Rightarrow \Theta(n)$.

- Regels 1, 8 en 15 gebeuren elk één keer $\Rightarrow \Theta(1) \subset O(n)$.
- Regels 2, 8 en 16 gebeuren elk $\frac{n}{2} + 1$ keer (één keer vaker dan 3, 10 en 17) $\Rightarrow \Theta(n) \subset O(n)$.
- Regels 4, 11 en 18 gebeuren elk hooguit even vaak als resp. regels 3, 10 en 17 $\Rightarrow O(n)$.
- Regels 6, 13 en 20 gebeuren elk precies even vaak als resp. regels 3, 10 en 17 $\Rightarrow O(n)$.

De arrayvergelijkingen zijn zinnige operaties. In totaal doet het algoritme er $\frac{3}{2}n$.

b.

- Regel 4 gebeurt hooguit $\frac{n}{2}$ keer, nml. als $A[i] > A[i+1]$ voor alle oneven $1 \leq i \leq n$, en minstens 0 keer, nml. als $A[i] \leq A[i+1]$ voor alle oneven $1 \leq i \leq n$. Dat zijn dus minimaal 0 en maximaal $\frac{3}{2}n$ toekenningen.
- Regels 8 en 15 gebeuren elk altijd één keer.
- Regel 11 gebeurt 0 keer als $\min(A[1], A[2])$ het (of eigenlijk een) kleinste element is van A. Hij gebeurt $\frac{n}{2} - 1$ keer als telkens een nieuw minimum wordt gevonden, d.w.z. als $\min(A[i], A[i+1]) < \min(A[i-2], A[i-1])$ voor alle oneven $3 \leq i \leq n$.
- Regel 18 is analoog aan regel 11: minimaal 0 keer als $\max(A[1], A[2])$ het grootste element is van A, en maximaal $\frac{n}{2} - 1$ keer als $\max(A[i], A[i+1]) > \max(A[i-2], A[i-1])$ voor alle oneven $3 \leq i \leq n$.

Samengevat:

- Best case: 2 toekenningen, als alle paren al goed staan voor regel 4 en als $A[1] \leq A[i]$ voor alle $1 \leq i \leq n$.
- Worst case: $\frac{5}{2}n$, als alle paren verkeerdom staan voor regel 4 en als de deelrijtjes (na regel 4) op de even en oneven posities resp. aflopend en oplopend zijn gesorteerd.

c. Er zijn meerdere manieren om het algoritme aan te passen. Een tweetal conceptueel eenvoudige, in geval van oneven n:

1. Dupliceer het laatste element en roep het algoritme aan met $n := n + 1$. Het aantal vergelijkingen is dan $3\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2. Tussen regels 7 en 8: als $A[n] > A[n-1]$, verwissel de twee. Vervolgens mag je $A[n]$ negeren (dit is dan immers gegarandeerd geen maximum en geen minimum) en roep je de rest van het algoritme aan met $n := n - 1$. Het aantal vergelijkingen is dan $3\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.