Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 12

Opgave 21

Zie uitwerking website

Opgave 26

Zie uitwerking website

Opgave 28

a. Vergelijk telkens de voorste elementen van de twee rijtjes en gooi het kleinste weg (bijvoorbeeld door de pointer in dat rijtje op te hogen). De i-de vergelijking levert het i-de element in grootte op, dus na n vergelijkingen heb je het n-de in grootte te pakken. De arrays zijn elk n groot, dus je hoeft geen verdere randvoorwaarden af te vangen.

b. Een beslissingsboom voor dit probleem o.b.v. van arrayvergelijkingen heeft arrayvergelijkingen op de interne knopen en de resultaten op de bladeren. Er zijn $2n$ mogelijke resultaten (alle $2n$ elementen kunnen het n-de in grootte zijn), dus elke beslissingsboom heeft minstens $2n$ bladeren. Voor dit type boom (resultaten op de bladeren) geldt dat $h \geq \lceil \lg b \rceil$, met h de hoogte van de boom en b het aantal bladeren, en dat het aantal vergelijkingen in de worst case h is. Dit geeft dat het aantal vergelijkingen in de worst case gelijk is aan $\geq \lceil \lg 2n \rceil = \lceil \lg n + 1 \rceil = \lceil \lg n \rceil + 1$.

c. In het bewijs verandert het aantal bladeren: de eerste $\frac{n}{2}$ elementen van het grotere rijtje kunnen niet meer het n-de element in grootte zijn, dus er zijn nog $\frac{3n}{2}$ elementen over. Dit geeft als ondergrens dus $\lceil \lg \frac{3n}{2} \rceil$.

Opgave 36

Zie uitwerking website

Opgave 60

Zie ter referentie de uitwerking van 59a op de website (voor SAT $\in \mathcal{NP}$), of de antwoorden op 59bcd bij werkcollege 9.

Idee voor KZ: gok een juiste oplossing, d.w.z., een rij getallen (string s; $O(|s|)$), te interpreteren als een rijtje getallen (indices van de gekozen objecten). Controleer vervolgens (1) of elk getal tussen 1 en n zit ($O(|s|)$); (2) of s geen dubbelen bevat ($O(|s|^2)$); (3) of de gewichten sommeren tot hooguit C ($O(|s| \times |x|)$; en (4) of de waarden sommeren tot minstens k ($O(|s| \times |x|)$).

Voor een ja-instantie geldt dat $|s| \in O(n) \subseteq O(|x|)$, dus alles is polynomiaal in $|x|$.

Opgave 68 (werkcollege 11)

a. Laat $V = \{1, \ldots, n\}$. Idee: gok een juiste onafhankelijke verzameling I met $|I| = K$. D.w.z., gok een string s, te interpreteren als een rij getallen. Controleer (1) of elk getal in s tussen 1 en n zit; (2) of s geen dubbelen bevat; (3) of s precies K getallen bevat; en (4) of er geen takken lopen tussen de knopen in s. Zo ja, dan stelt s een onafhankelijke verzameling ter grootte K voor.

Voor een ja-instantie geldt dat $|s| \in O(|G|)$, dus dan is alles polynomiaal in $|x|$ (met $x = \langle G, K \rangle$).

b.

(i) Nee. Als P reduceert naar InSet, wil dat niet zeggen dat alles in $\mathcal{NP}$ ook reduceert naar P.

(ii) Ja. Als InSet reduceert naar P en InSet is NP-volledig, dan reduceert alles in $\mathcal{NP}$ transitief naar P (stelling college). Dus P is NP-moeilijk. Verder weten we dat $P \in \mathcal{NP}$, dus P is NP-volledig (definitie).

(iii) Nee. Dit zou alleen opgaan als is gegeven dat $P \in \mathcal{NP}$, maar dat is nu niet gegeven.

c.

(i) Nee. Dit is triviaal na te gaan in $O(|V|^2 \times |E|)$ door alle paren knopen af te gaan. Alternatief komt 2InSet neer op het bepalen of een graaf volledig is, dus is na te gaan door te kijken of $|E| = \frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$.

(ii) Nee. kInSet is triviaal na te gaan in $O(|V|^k \times |E|)$ door te itereren over alle deelverzamelingen van $|V|$ ter grootte k. Voor een vaste k is dit polynomiaal (al zij het onpraktisch voor grote k).