Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 11

Opgave 66

a. Idee: gok een juiste vertex cover van grootte $\leq k$. D.w.z., gok een rij getallen (string s; $O(|s|)$); controleer of het een deelverzameling van de knopen voorstelt: (1) elk getal tussen 1 en n (met knopen $1, \ldots, n$) ($O(|s|)$) en (2) geen dubbelen ($O(|s|^2)$); controleer vervolgens (3) of er hooguit k getallen zijn ($O(|s|)$); controleer ten slotte (4) voor elke tak of minstens één van de uiteinden in de gegokte verzameling zit ($O(|E| \times |s|)$.

Voor een ja-instantie geldt dat $|s| \in O(|\mathcal{G}|)$, dus dan is alles polynomiaal in $|\mathcal{G}|$.

Zie de uitwerking van 59a voor een nette template.

b. Laat $x = \langle \mathcal{G}, k \rangle$. We construeren $\overline{\mathcal{G}}$ als volgt:

- kopieer alle knopen; $O(|V|) \subseteq O(|x|)$
- ga alle paren knopen af en voeg de takken toe die niet voorkomen in $\mathcal{G}$; $O(|V|^2 \times |E|) \subseteq O(|x|^3)$

De hele constructie kan dus in $O(|x|^3)$.

c.

$\Rightarrow$: Stel dat $\mathcal{G}$ een kliek V' ter grootte $\geq$ k heeft. Dan is $V \setminus V'$ een vertex cover ter grootte $\leq |V| - k$ in $\overline{\mathcal{G}}$. Immers: $V \setminus V'$ dekt alle takken behalve die tussen knopen in V', maar per constructie bevat $\overline{E}$ geen takken tussen knopen in V'. V' is namelijk een kliek in $\mathcal{G}$, dus E bevat alle takken tussen knopen in V', dus $\overline{E}$ geen. En: $|V'| \geq k$, dus $|V \setminus V'| \leq |V| - k$.

$\Leftarrow$: Stel dat $\overline{\mathcal{G}}$ een vertex cover V' ter grootte $\leq |V| - k$ heeft. Dan is $V \setminus V'$ een kliek ter grootte $\geq k$ in $\mathcal{G}$. Immers: V' is een vertex cover in $\overline{\mathcal{G}}$, dus $\overline{E}$ bevat geen takken tussen knopen in $V\ V'$ (die zijn ten slotte niet gedekt door V'). Dan moet E alle takken bevatten tussen knopen in $V \setminus V'$. M.a.w.: $V \setminus V'$ is een kliek in $\mathcal{G}$. En: $|V'| \leq |V| - k$, dus $|V \setminus V'| \geq |V| - (|V| - k) = k$.

Opgave 67

Zie uitwerking website

Opgave 68

a. Laat $V = \{1, \ldots, n\}$. Idee: gok een juiste onafhankelijke verzameling I met $|I| = K$. D.w.z., gok een string s, te interpreteren als een rij getallen. Controleer (1) of elk getal in s tussen 1 en n zit; (2) of s geen dubbelen bevat; (3) of s precies K getallen bevat; en (4) of er geen takken lopen tussen de knopen in s. Zo ja, dan stelt s een onafhankelijke verzameling ter grootte K voor.

Voor een ja-instantie geldt dat $|s| \in O(|G|)$, dus dan is alles polynomiaal in $|x|$ (met $x = \langle G, K \rangle$).

b.

(i) Nee. Als P reduceert naar InSet, wil dat niet zeggen dat alles in $\mathcal{NP}$ ook reduceert naar P.

(ii) Ja. Als InSet reduceert naar P en InSet is NP-volledig, dan reduceert alles in $\mathcal{NP}$ transitief naar P (stelling college). Dus P is NP-moeilijk. Verder weten we dat $P \in \mathcal{NP}$, dus P is NP-volledig (definitie).

(iii) Nee. Dit zou alleen opgaan als is gegeven dat $P \in \mathcal{NP}$, maar dat is nu niet gegeven.

c.

(i) Nee. Dit is triviaal na te gaan in $O(|V|^2 \times |E|)$ door alle paren knopen af te gaan. Alternatief komt 2InSet neer op het bepalen of een graaf volledig is, dus is na te gaan door te kijken of $|E| = \frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$.

(ii) Nee. kInSet is triviaal na te gaan in $O(|V|^k \times |E|)$ door te itereren over alle deelverzamelingen van $|V|$ ter grootte k. Voor een vaste k is dit polynomiaal (al zij het onpraktisch voor grote k).