Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 10

Opgave 58

a. Idee: als $P \in \mathcal{P}$ dan bestaat er een deterministisch polynomiaal algoritme A voor P. Algoritme A' voor $\overline{P}$ is dan: voer A uit en retourneer $\neg y$, waarbij y de uitvoer is van A.

Andersom gaat analoog.

Zie eventueel slides 34–35 van college 9 als inspiratie.

b. Laat $P \in \mathcal{P}$. We weten uit a. dat $\overline{P} \in \mathcal{P}$. We weten uit college 9 dat $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$, dus dan volgt dat $\overline{P} \in \mathcal{NP}$. Daarmee geldt dat $\mathcal{P} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$.

c. Laat P een arbitrair beslissingsprobleem zijn. Als $P \in \mathcal{P}$ dan $\overline{P} \in \mathcal{P}$ (a.) en dus $P \in$ co-$\mathcal{P}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{P} \subseteq$ co-$\mathcal{P}$. Als $P \in$ co-$\mathcal{P}$ dan $\overline{P} \in \mathcal{P}$ en dan $P \in \mathcal{P}$ (ook a.). Hieruit volgt dat co-$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$. Dan hebben we dat $\mathcal{P} =$ co-$\mathcal{P}$.

d. Idee: draai het om en bewijs $\mathcal{P} = \mathcal{NP} \Rightarrow \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$. Als $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ dan geldt co-$\mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{P}$ (volgt per definitie uit $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$), co-$\mathcal{P} = \mathcal{P}$ (c.) en $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ (aanname), dus dan co-$\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$. Hieruit volgt dat, als $\mathcal{NP} \neq$ co-$\mathcal{NP}$, dan $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Opgave 63

a. Idee: voeg een extra knoop toe die is verbonden met elke andere knoop. Deze moet een andere kleur hebben dan alle andere knopen, dus de rest van de graaf moet 3-kleurbaar zijn. Dit is d.e.s.d.a. de oorspronkelijke graaf 3-kleurbaar is.

b. Idee: gok een string s (te interpreteren als een rij getallen, d.w.z. als kleuring van de knopen) en ga na dat (1) er precies $|V|$ kleurtoekenningen staan ($O(|s|)$), (2) elke kleur 1, 2 of 3 is ($O(|s|)$), (3) twee buren verschillende kleuren hebben ($O(|s| \times |E|)$). Zie de slides of het dictaat voor een voorbeeld van hoe je het netjes uitwerkt.

c. Nee, nog niet. Uit a. volgt dat 4Kleur NP-moeilijk is, maar nog niet NP-volledig; dan moet 4Kleur ook in $\mathcal{NP}$ zitten en dat is nog niet aangetoond.

Opgave 64

(1) Een ongerichte graaf is 1-kleurbaar d.e.s.d.a. hij geen takken heeft.
Een ongerichte graaf is 2-kleurbaar d.e.s.d.a. hij bipartiet is, d.w.z. als de knopen zijn in te delen in twee deelverzamelingen zodat alle takken tussen de twee deelverzamelingen lopen (en niet tussen paren knopen die in dezelfde deelverzameling zitten).

(2) 1-kleurbaar: controleer of de graaf takken heeft. Zo ja, dan kan het niet. Zo nee, geef alle knopen dezelfde kleur.
2-kleurbaar: neem als kleuren blauw en rood. Kleur een arbitraire knoop blauw. Kleur vervolgens alle buren rood. Bekijk vervolgens alle buren van de zojuist gekleurde knopen: als blauw dan is het tot nu toe goed; als rood dan is het fout en dan kan het niet; als ongekleurd dan kleur je ze blauw. Herhaal dit voor alle nieuw toegevoegde buren en met de juiste kleuren. Als je geen buren meer kan vinden maar nog wel knopen over hebt: kleur weer een arbitraire knoop blauw. Als dit proces termineert zonder fouten, heb je een juiste 2-kleuring gevonden. Zo niet, dan kan het niet.

Opgave 65

Zie uitwerking website voor de reductie. Dan ontbreekt nog een bewijs voor TSP $\in \mathcal{NP}$, refereer of kopieer daarvoor opgave 59d (werkcollege 9).