Beknopte antwoorden opgaven werkcollege 1

Opgave 1

a. Basisoperatie: vermenigvuldigingen. Aantal keren: $n-1$.

b. $\lfloor \lg n \rfloor$ vermenigvuldigingen voor het vinden van alle tweemachten. Hooguit $\lfloor \lg n \rfloor$ vermenigvuldigingen voor het combineren van hooguit $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ tweemachten. Totaal dus hooguit $2\lfloor \lg n \rfloor$.

c. Het algoritme uit **b.** gebruikt zes vermenigvuldigingen voor x^{15}. Het kan echter in vijf: $x^2 = x \times x$, $x^3 = x^2 \times x$, $x^5 = x^3 \times x^2$, $x^{15} = x^5 \times x^5 \times x^5$. Nee dus.

Opgave 2

a. $\begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 82 & 34 \end{pmatrix}$ 8 vermenigvuldigingen en 4 optellingen

b. n^3 vermenigvuldigingen en $n^2(n-1)$ optellingen

c. Voor k array-elementen ($k = n^2$): $k\sqrt{k}$ vermenigvuldigingen en $k(\sqrt{k}-1)$ optellingen

d. Je kan een vermenigvuldiging van twee gehele getallen ook uitrollen tot een (lange) reeks optellingen, dus het kan dan technisch gezien ook zonder vermenigvuldigingen. M.a.w.: nee.

e. Je zult in ieder geval elk van de n^2 elementen in de uitvoer moeten berekenen. Dit kost toch zeker minstens één operatie per element. Hetzelfde is te zeggen voor de $2n^2$ elementen in A en B.

f. Allebei mogelijk, maar je kan geen van beide uitspraken concluderen uit deze constatering.

Opgave 3

a. Maatgevend voor de complexiteit, en een fundamentele operatie voor het oplossen van het probleem.

b. 1, als $A[1] = X$.

c. n, als $X \notin \{A[1], \ldots, A[n-1]\}$ (d.w.z. als X niet voorkomt in A of als $X = A[n]$ maar X is ongelijk aan alle voorgaande elementen)

d. Als $X \in A$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)$. Als $X \notin A$: n.

Laat $0 \leq q \leq 1$ de kans zijn dat $X \in A$. Dan is de average case complexity $q \times \frac{1}{2}(n+1) + (1-q)n \in \Theta(n)$ (los na te gaan voor $q=0$, $q=1$ en $0 < q < 1$).

e. Zie uitwerking website

Opgave 4

a. 1, als $A[1] \geq X$.

b. n, als $A[n-1] < X$. Dit is dezelfde worst case-complexiteit, maar er zijn minder worst case-rijtjes.

c. Als $X \in A$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}(n+1)$ (zie 3d).

Als $X \notin A$: $\frac{1}{n+1}(\sum_{i=1}^{n} i+n) = \frac{1}{2}n+\frac{n}{n+1}$ (i vergelijkingen als $A[i-1] < X < A[i]$ of als $X < A[1]$, en los nog eens n vergelijkingen als $X > A[n]$)

Laat q de kans zijn dat $X \in A$. Dan:

$$\begin{aligned} & q \times \frac{1}{2}(n+1) + (1-q)(\frac{1}{2}n + \frac{n}{n+1}) \\ = & \frac{1}{2}n + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2}qn + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}qn - q \times \frac{n}{n+1} \\ = & \frac{1}{2}n + \frac{n}{n+1} + q(\frac{1}{2} - \frac{n}{n+1}) \\ \in & \Theta(\frac{n}{2}) \end{aligned}$$

Opgave 6

Zie uitwerking website