Complexiteit: HC1 $\leq_{\mathrm{P}}$ HC2

HC1 is het Hamiltonkringprobleem voor gerichte grafen, en HC2 dat voor ongerichte grafen. Zie het dictaat: 9.6.1.

We hebben een transformatie T, die een gerichte graaf afbeeldt op een ongerichte graaf. Gegeven een gerichte graaf $\mathcal{G}= (V, E)$. Dan $T(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'= (V', E')$ met $V' = \{v_1, v_2, v_3 : v \in V\}$, en $E' = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3) : v \in V\} \cup \{(v_3, w_1) : (v, w) \in E\}$.
We moeten aantonen dat geldt:

(1) De constructie van $T(\mathcal{G})$ uit $\mathcal{G}$ kan in polynomiale tijd (dus $O(|\mathcal{G}|^k)$)

(2) $\mathcal{G}$ heeft een gerichte Hamiltonkring $\Longleftrightarrow$ T($\mathcal{G}$) heeft een ongerichte Hamiltonkring

(1) Merk op dat $|V'| = 3 * |V|$ en $|E'| = 2 * |V| + |E|$, dus $|\mathcal{G}'| \in O(|\mathcal{G}|)$. De constructie kan polynomiaal. Een (nogal uitgebreid) bewijs hiervoor is het volgende.
Denk aan een eenvoudig C++-programmaatje, met grafen bijvoorbeeld via de adjacencylist gerepresenteerd. De beeldgraaf moet dan 3 keer zoveel knopen bevatten als de oorspronkelijke graaf (groot genoeg array declareren dus, en $O(|\mathcal{G}|)$ voor initialisatie). Laten ze in de volgorde $v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_2^n, v_3^n$ in het array staan als $v^1, v^2, \ldots, v^n$ de volgorde is waarin de knopen van $\mathcal{G}$ in diens representatie voorkomen.
$\mathcal{G}'$ kan nu verder uit $\mathcal{G}$ geconstrueerd worden door allereerst de knopen van $\mathcal{G}'$ te doorlopen en steeds v_1^i en v_2^i in elkaars buurlijst te plaatsen (ofwel er wordt een tak tussen v_1^i en v_2^i aangelegd), evenals v_2^i en v_3^i. Dit is $O(|\mathcal{G}|)$, want $|\mathcal{G}'| \in O(|\mathcal{G}|)$.
Vervolgens de takken die corresponderen met de pijlen in de oorspronkelijke graaf aanbrengen. Loop hiertoe de graaf $\mathcal{G}$ af ($O(|\mathcal{G}|)$) en voor elke pijl (v, w) uit $\mathcal{G}$ brengen we een tak aan tussen v_3 en w_1 in $\mathcal{G}'$ door w_1 in de buurlijst van v_3 te plaatsen en andersom. Voor elke pijl moeten we dus de twee bijbehorende knopen in $\mathcal{G}'$ opzoeken en de buurlijsten aanpassen. Als het goed is zijn de knopen direct te adresseren, dus dan kan het opzoeken in $O(1)$ stappen. (Als we echt moeten zoeken kan het zeker in $O(\mathcal{G}') \subseteq O(\mathcal{G})$ stappen.) Dit kan dus in totaal, voor alle pijlen samen, in $O(|\mathcal{G}|)$ stappen. (In het andere geval zeker in $O(|\mathcal{G}|^2)$ stappen.) De volledige constructie is zo dus ook $O(|\mathcal{G}|)$ (danwel $O(|\mathcal{G}|^2)$): polynomiaal.
(2) Te bewijzen: $\mathcal{G}$ heeft een gerichte Hamiltonkring $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{G}'$ heeft een ongerichte Hamiltonkring.
"$\Longrightarrow$": Laat $v^1, v^2, \ldots, v^n$ een (gerichte) Hamiltonkring zijn in $\mathcal{G}$ (met $n = |V|$), dat wil zeggen alle v^i zijn verschillend en $(v^i, v^{i+1}) \in E$ en $(v^n, v^1) \in E$.
Bewering: dan is $v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_1^n, v_2^n, v_3^n$ een ongerichte Hamiltonkring in $\mathcal{G}'$.
Immers: alle knopen zijn verschillend (duidelijk) en alle knopen worden aangedaan (één keer dus). Verder: tussen v_j^i en v_{j+1}^i zit een tak ($j = 1, 2$) (volgt uit de constructie van $\mathcal{G}'$) en tussen v_3^i en v_1^{i+1} ook omdat er in $\mathcal{G}$ een tak van v^i naar v^{i+1} gaat. Om dezelfde reden is ook $(v_3^n, v_1^1) \in E'$.
"$\Longleftarrow$": Stel dat $\mathcal{G}'$ een ongerichte Hamiltonkring heeft, die dus alle knopen van $\mathcal{G}'$ precies één keer bevat. In dat circuit moeten voor elke i de knopen v_1^i, v_2^i, v_3^i altijd direct na elkaar

komen en bovendien ofwel in de volgorde v_1^i, v_2^i, v_3^i worden doorlopen, ofwel in de volgorde v_3^i, v_2^i, v_1^i. Dit is zo omdat v_2^i alleen via v_1^i of v_3^i bereikt kan worden.
Omdat alle andere takken in $\mathcal{G}'$ knopen verbinden met subscripts 1 en 3 (uit de constructie) geldt: als voor één drietal v_1^i, v_2^i, v_3^i de doorloopvolgorde $1, 2, 3$ is in de kring, dan moet dat voor *elk* drietal gelden (en evenzo voor doorloopvolgorde $3, 2, 1$). Daar $\mathcal{G}'$ ongericht is geldt dat als H een Hamiltonkring is, dan is H in omgekeerde volgorde doorlopen dat ook. We kunnen dus wel aannemen dat we een Hamiltonkring van de vorm $v_1^{i_1}, v_2^{i_1}, v_3^{i_1}, v_1^{i_2}, \ldots, v_1^{i_n}, v_2^{i_n}, v_3^{i_n}$ hebben, dus met doorloopvolgorde $1, 2, 3$.
Bewering: dan is $v^{i_1}, v^{i_2}, v^{i_3}, \ldots, v^{i_n}$ een gerichte Hamiltonkring in $\mathcal{G}$.
Immers: alle v^j's zijn verschillend, en alle n worden ze aangedaan (één keer dus), en $(v^{i_1}, v^{i_2}) \in E$ (er is een pijl van v^{i_1} naar v^{i_2}) omdat $(v_3^{i_1}, v_1^{i_2}) \in E'$[1], $(v^{i_2}, v^{i_3}) \in E$ omdat $(v_3^{i_2}, v_1^{i_3}) \in E'$, etcetera, en om dezelfde reden is ook $(v^{i_n}, v^{i_1}) \in E$.

In de constructie worden steeds *drie* nieuwe knopen per oorspronkelijke knoop gemaakt. Dit zorgt ervoor dat elke Hamiltonkring in $\mathcal{G}'$ altijd v_1^i en v_3^i vlak na elkaar aandoet, zonder andere v_k^j met $i \neq j$ ertussen. Dit is nodig om een Hamiltonkring in $\mathcal{G}$ af te dwingen. Een constructie met bijvoorbeeld twee knopen per oorspronkelijke knoop werkt om die reden niet. Ook het weglaten van de pijlpunten levert geen goede reductie op.

Een mogelijke reductie de andere kant op, dus een reductie van HC2 naar HC1, zou bijvoorbeeld de volgende, eenvoudige tranformatie kunnen zijn. Uitgaande van een ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$ construeren we een gerichte graaf $\mathcal{G}' = (V', E')$ als volgt: $V' = V$ en voor elke tak (v, w) uit $\mathcal{G}$ maken we twee takken (pijlen dus) (v, w) en (w, v) in $\mathcal{G}'$, dus $E' = \{(v, w), (w, v) : (v, w) \in E\}$. Voor ongerichte grafen met meer dan 2 knopen ($|V| \geq 3$) is dit een goede reductie. Bewijs dit zelf. Aangezien een kring per definitie bestaat uit verschillende takken, is dit misschien geen goede reductie voor een graaf met maar twee knopen. Dat is wel het geval als we bij de definitie van een (gerichte) kring opnemen dat deze uit drie of meer knopen moet bestaan.

[1] en dan loopt er dus een pijl van v^{i_1} naar v^{i_2}; dat volgt direct uit de constructie