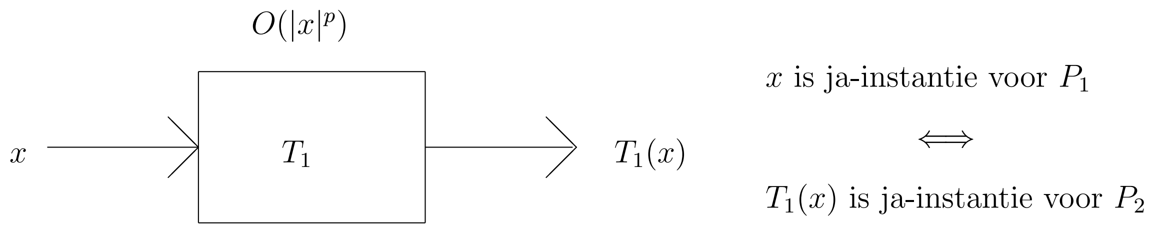
Transitiviteit van reducties (opgave 62)

De relatie $\leq_P$ is transitief, dat wil zeggen: als $P_1 \leq_P P_2$ en $P_2 \leq_P P_3$ dan ook $P_1 \leq_P P_3$.

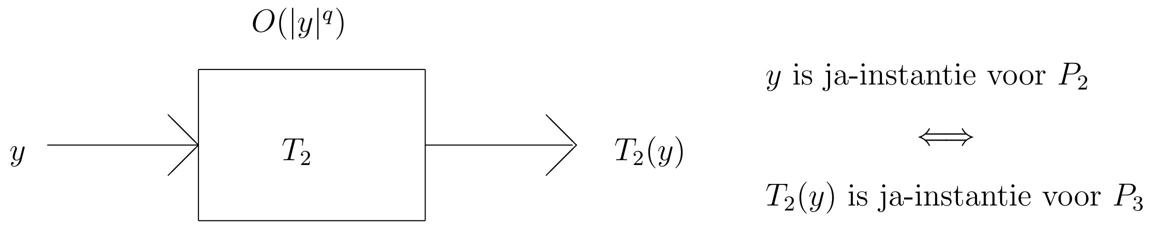
- $P_1 \leq_P P_2$ betekent dat er een afbeelding T_1 bestaat die elke invoer x van P_1 afbeeldt op invoer $T_1(x)$ van P_2, en wel zo dat geldt:

  1. de constructie van $T_1(x)$ uit x is polynomiaal: $O(|x|^p)$, en
  2. x is een ja-instantie van $P_1 \iff T_1(x)$ is een ja-instantie van P_2



- $P_2 \leq_P P_3$ betekent dat er een afbeelding T_2 bestaat die elke invoer y van P_2 afbeeldt op invoer $T_2(y)$ van P_3, en wel zo dat geldt:

  1. de constructie van $T_2(y)$ uit y is polynomiaal: $O(|y|^q)$, en
  2. y is een ja-instantie van $P_2 \iff T_2(y)$ is een ja-instantie van P_3



Dan is $T_2 \circ T_1$ een polynomiale reductie van P_1 naar P_3, en dus $P_1 \leq_P P_3$. Immers:

1. $T_2 \circ T_1(x) = T_2(T_1(x))$ kan uit x geconstrueerd worden in een polynomiaal aantal stappen: de constructie bestaat namelijk uit de samenstelling van twee polynomiale algoritmes: eerst de constructie van $T_1(x)$ uit x en dan de constructie van $T_2(T_1(x))$ uit $T_1(x)$. Aangezien T_1 en T_2 allebei polynomiaal zijn, is de samenstelling dat ook, en wel $O(|x|^{pq})$.[1]

[1] Hier gebruiken we dat, aangezien de constructie van $T_1(x)$ uit x polynomiaal is, in het bijzonder ook de lengte van $T_1(x)$ polynomiaal moet zijn, dus $|T_1(x)| \in O(|x|^p)$

2. $T_2 \circ T_1(x) = T_2(T_1(x))$ is een ja-instantie van $P_3 \iff T_1(x)$ is een ja-instantie van P_2 $\iff x$ is een ja-instantie van P_1
Hier is eerst de reductie-eigenschap voor T_2 gebruikt en vervolgens de reductie-eigenschap voor T_1.

Een plaatje van de transformatie $T_2 \circ T_1$