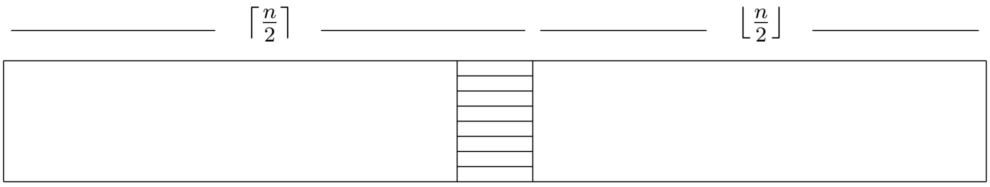
Complexiteit

Uitwerking Opgave 5 a,b

Opgave 5 a. en **b.**

a. Binair zoeken (zie opgave) prikt in een rij/array van n elementen altijd links van het midden als n even is, en precies in het midden als n oneven is. Als X niet in die ronde gevonden wordt, wordt ofwel doorgegaan met het linkergedeelte, bestaande uit $n/2-1$ elementen als n even is, en uit $(n-1)/2 = \lfloor n/2 \rfloor$ als n oneven is; ofwel met het rechtergedeelte, bestaande uit $n/2$ elementen als n even is, en uit $(n-1)/2 = \lfloor n/2 \rfloor$ elementen als n oneven is.



Kortom, in het ergste geval wordt verder gegaan met $\lfloor n/2 \rfloor$ elementen. (Immers, als n oneven is zitten zowel links als rechts $\lfloor n/2 \rfloor$ elementen om in verder te zoeken, en als n even is zitten er rechts meer dan links, namelijk $n/2 = \lfloor n/2 \rfloor$.) Vandaar dat geldt:

$$W(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + W(\lfloor n/2 \rfloor) & n > 1 \end{cases}$$

b. We bewijzen met behulp van volledige inductie dat $W(n)$, de oplossing van bovenstaande recurrente betrekking, gelijk is aan $\lceil \lg(n+1) \rceil = 1 + \lfloor \lg n \rfloor$. De laatste gelijkheid hebben we overigens bewezen in college 2.

<u>Basis</u>
Voor $n = 1$ hebben we: $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lceil \lg(2) \rceil = 1$, en dat klopt met de beginwaarde uit de recurrente betrekking.

<u>Inductie-aanname</u>
Veronderstel dat inderdaad $W(n) = \lceil \lg(n+1) \rceil = 1 + \lfloor \lg n \rfloor$ (#) voor alle $n < N$ voor zekere gehele $N > 0$.

We moeten nu bewijzen dat (#) ook geldt voor N, dus voor het volgende natuurlijke getal. M.a.w. te laten zien: $W(N) = \lceil \lg(N+1) \rceil = 1 + \lfloor \lg N \rfloor$
Uit de recurrente betrekking: $W(N) = 1 + W(\lfloor N/2 \rfloor)$. We maken hierna onderscheid tussen het geval dat N even is (1) of oneven (2).

(1) In dit geval is $W(N) = 1 + W(N/2) =$ (volgens de Inductie-aanname omdat $N/2 <$

N) $1+1+\lfloor \lg N/2 \rfloor = 1+1+\lfloor \lg N - \lg 2 \rfloor = 1+1+\lfloor \lg N - 1 \rfloor = 1+1+\lfloor \lg N \rfloor - 1 = 1 + \lfloor \lg N \rfloor$. QED

(2) In dit geval is $W(N) = 1 + W((N-1)/2) =$ (volgens de Inductie-aanname omdat $(N-1)/2 < N$) $1+\lceil \lg((N-1)/2+1) \rceil = 1+\lceil \lg((N+1)/2) \rceil = 1+\lceil \lg(N+1) - \lg 2 \rceil = 1 + \lceil \lg(N+1) \rceil - 1 = \lceil \lg(N+1) \rceil$. QED

Conclusie: $W(n) = \lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \ \forall n \geq 1$.