Uitwerking Complexiteit
opgave 36

opgave 36
Eerst proberen we de oplossing te vinden door $B(n)$ herhaald in zichzelf in te vullen.
$B(n) = 2B(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2} = 2 \cdot \{2B(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2^2}\} + \frac{n}{2} = 2^2B(\frac{n}{2^2}) + 2 \cdot \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2} = 2^2B(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = 2^2 \cdot \{2B(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^3}\} + 2 \cdot \frac{n}{2} = 2^3B(\frac{n}{2^3}) + 2^2 \cdot \frac{n}{2^3} + 2 \cdot \frac{n}{2} = 2^3B(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2} + 2 \cdot \frac{n}{2} = 2^3B(\frac{n}{2^3}) + 3 \cdot \frac{n}{2} = \ldots =$ (algemene vorm, vermoedelijk) $2^\ell B(\frac{n}{2^\ell}) + \ell \cdot \frac{n}{2} =$ (neem $\ell = k$, dan $\frac{n}{2^\ell} = 1$) $2^k B(1) + k \cdot \frac{n}{2} =$ (want $B(1) = 0$ en $k = \lg n$) $\frac{n}{2} \lg n$.

Nu nog bewijzen dat de gevonden $B(n) = \frac{n}{2} \lg n$ inderdaad de oplossing is van de recurrente betrekking. Dit gaat m.b.v. volledige inductie.

(i) $B(n) = \frac{n}{2} \lg n$ voldoet inderdaad aan $B(1) = \frac{1}{2} \cdot \lg 1 = 0$.
(ii) Inductie-aanname: stel dat $B(n)$, de oplossing van de recurrente betrekking, gelijk is aan $\frac{n}{2} \lg n$ voor alle 2-machten $n \geq 1$ met $n < N$ en met N een 2-macht ≥ 2. Dan moeten we laten zien dat dit dan ook geldt voor de oplossing van de recurrente betrekking voor deze N (de volgende 2-macht dus) ofwel dat $B(N) = \frac{N}{2} \lg N = \frac{1}{2} N \lg N$.

Er geldt: $B(N) =$ (recurrente betrekking) $2B(\frac{N}{2}) + \frac{N}{2} =$ (inductie-aanname) $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2} \lg \frac{N}{2}) + \frac{N}{2} = \frac{N}{2}(\lg N - \lg 2) + \frac{N}{2} = \frac{N}{2} \lg N - \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N}{2} \lg N$.

QED