Complexiteit

Uitwerking Opgave 20

a. $\#(1) = 1$, $\#(2) = \#(3) + 1$, $\#(3) \geq 1$ omdat $n > 1$, $\#(4) \leq \#(3)$, $\#(6) \leq \#((3)$, $\#(7) = \#(8) \leq \#(6)$, $\#(10) = \#(6)$.
Dus (I) en (II) zijn allebei maatgevend voor de complexiteit. Operatie (II) is echter de beste basisoperatie, want de werking van het algoritme is gebaseerd op de uitslag van de tests of $A[i]$ resp. $A[j]$ even is, dus (II) is fundamenteel voor de werking.
Operatie (III) is niet maatgevend. Er zijn immers invoerrijtjes waarvoor 0 verwisselingen plaatsvinden, maar $n - 1$ tests uit regel (3). Bijvoorbeeld rijtjes met alle $A[i]$ even. Geen goede maat dus.

b. In elke ronde wordt ofwel i met 1 opgehoogd, ofwel j met 1 opgehoogd of beide. Dat laatste levert het best case aantal tests, want dan wordt het bekeken interval met 2 kleiner. Best case vindt plaats als in elke stap de test in regel (3) false oplevert ($A[i]$ is oneven) en de test in regel (6) true ($A[j]$ is even). In dat geval worden $A[i]$ en $A[j]$ verwisseld en zowel i opgehoogd als j afgelaagd. Elke keer moet dus $A[i]$ oneven en $A[j]$ even zijn, dus de eerste helft moet uit oneven getallen bestaan, de tweede helft uit even getallen. Iets preciezer: voor n even is in de laatste stap (middelste twee elementen) $i = \frac{n}{2}$ en $j = \frac{n}{2} + 1$. Het maakt dan niet uit of de twee middelste elementen even of oneven zijn; er wordt daarna altijd gestopt omdat $i \geq j$ is geworden. Voor n oneven moeten de eerste $\frac{n-1}{2}$ waarden oneven zijn en de laatste $\frac{n-1}{2}$ even, maar de middelste doet er niet toe; zodra $i = j$ stopt het algoritme. Het aantal vergelijkingen in de best case is $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Immers, als n even: $\frac{n}{2} + 1$ vergelijkingen, als n oneven: $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ vergelijkingen.
In de worst case wordt altijd ofwel i met 1 opgehoogd, ofwel j met 1 afgelaagd, maar nooit beide. Dit betekent dat in elke ronde ofwel $A[i]$ even is, ofwel $A[i]$ oneven *en* $A[j]$ oneven. Er wordt in de worst case dus nooit gewisseld, en derhalve komt het nooit voor dat je links (i) een oneven getal tegenkomt en rechts (j) een even getal. Dit kan alleen optreden als A er als volgt uitziet: een aantal —eventueel 0— even getallen, gevolgd door een aantal —eventueel 0— oneven getallen. Bij het eerste oneven getal dat je links tegenkomt moet er rechts ook een oneven getal staan, en vervolgens zul je steeds met j naar links lopen, waarbij je alleen maar oneven getallen mag tegenkomen. Het aantal stappen (tests regel (2)) dat je zo doet is dan uiteraard n, omdat je bekeken interval telkens maar 1 stap kleiner wordt en je stopt zodra je merkt dat i gelijk is aan j.

c. Er wordt alleen verwisseld als geldt dat $A[i]$ oneven is *en* $A[j]$ even (*). In dat geval wordt i met 1 opgehoogd, en j met 1 afgelaagd. Het beste geval treedt op als (*) nooit voorkomt, d.w.z. als in elke ronde (doorloop door de while) ofwel $A[i]$ even is, ofwel $A[i]$ en $A[j]$ beide oneven. Zodra we links een oneven waarde tegenkomen blijft i gelijk (voor de best case), en zal dus vanaf dat moment telkens $A[j]$ oneven moeten zijn. Vervolgens wordt in elke stap j 1 kleiner, totdat j gelijk is geworden aan i. Met andere woorden: het beste geval (dat zijn dus nul verwisselingen) treedt op als A er als volgt uitziet: een aantal —eventueel 0— even getallen, gevolgd door een aantal —eventueel 0— oneven getallen. Dit komt overeen met het worst case geval voor operatie I (zie **b.**).
In de worst case wordt in elke doorgang gewisseld, en dat kan alleen gebeuren als steeds

$A[i]$ oneven is en $A[j]$ even. Vervolgens schuift steeds i naar rechts en j naar links. Er staan dus in de linkerhelft oneven getallen en in de rechterhelft even getallen. Als n even is ziet A er dus als volgt uit: $A[1]$ t/m $A[n/2]$ zijn oneven en $A[n/2+1]$ t/m $A[n]$ zijn even. Voor de worst case moeten immers alle $A[i]$ en $A[n-i+1]$ gewisseld worden, ook de middelste twee. Aantal verwisselingen: $n/2$. Als n oneven is zijn $A[1]$ t/m $A[\lfloor n/2 \rfloor]$ oneven, $A[\lceil n/2 \rceil]$ (het midden) doet er niet toe en $A[\lceil n/2 \rceil + 1]$ t/m $A[n]$ is even. Ofwel in het algemeen: de eerste $\lfloor n/2 \rfloor$ elementen zijn oneven en de laatste $\lfloor n/2 \rfloor$ elementen zijn even. Voor oneven n komt dit overeen met het best case geval voor operatie I (zie **b.**).

d. Bij elke doorgang door de while wordt in elk geval de test in regel (3) gedaan. Alleen als die test false is wordt de test in regel (6) ook gedaan. Voor de worst case is ook het aantal doorgangen door de while-loop van belang. Het aantal keer dat II plaatsvindt is maximaal als het aantal rondes maximaal is *en* tevens het aantal tests per ronde. Dit maximale aantal kan ten duidelijkste bereikt worden, en wel (dan en slechts dan) als in elke ronde $A[i]$ oneven is *en* $A[j]$ oneven. In dat geval wordt alleen j met 1 afgelaagd, en blijft i op 1 staan. Er vinden dus $n-1$ rondes (doorgangen) plaats, met in elke ronde 2 vergelijkingen. In de laatste ronde is $i = 1, j = 2$ mag $A[j]$ even zijn, want daarna stopt de while-loop altijd sowieso. Totaal aantal keer operatie II is in dat geval $2(n-1)$. Dit komt alleen voor als A geheel uit oneven getallen bestaat of als alle $A[2]$ even is en alle andere waardes in A oneven.