Uitwerking opgave 16

a. Bepaal eerst de kleinste waarde door het array één keer door te lopen: $n-1$ vergelijkingen. Verwissel de kleinste met het achterste array-element. Zoek nu de grootste door het array tot en met het een na laatste element af te lopen: $n-2$ vergelijkingen. Verwissel de grootste met het voorste array-element. Totaal nodig hiervoor: $2n-3$ array-vergelijkingen. Nu staan het voorste en het achterste element al goed: resteren nog de $n-2$ overige elementen: $A[2]$ t/m $A[n-1]$. Deze sorteren we op dezelfde manier als het oorspronkeleijk array: recursie. Dat kost dus $S(n-2)$ vergelijkingen. We vinden derhalve: $S(n) = S(n-2) + 2n - 3$.
Als $n = 0$ valt er niets te sorteren, dus is het aantal vergelijkingen 0. (Ter controle: als $n = 2$ komt het algoritme neer op het vinden van de grootste (en kleinste) van twee elementen. Daarvoor is 1 vergelijking nodig. Ook volgens de recurrente betrekking geldt: $S(2) = S(0) + 1 = 1$.)
b. Eerst proberen we de oplossing te vinden door $S(n)$ herhaald in zichzelf in te vullen.
$S(n) = S(n-2)+2n-3 = S(n-4)+2(n-2)-3+2n-3 = S(n-4)+2(n-2)+2n-2*3 = S(n-6)+2(n-4)-3+2(n-2)+2n-2*3 = S(n-6)+2(n-4)+2(n-2)+2n-3*3 = \cdots =$ (algemene vorm) $S(n-h) + 2(n-h+2) + \cdots + 2(n-4) + 2(n-2) + 2n - \frac{h}{2} * 3 =$ (vul $h = n$ in om de beginconditie te kunnen gebruiken) $S(0) + 2*(2 + \cdots + n - 2 + n) - \frac{n}{2} * 3 = 2 * (2 + \cdots + n - 2 + n) - \frac{3n}{2} =$ (gebruik de hint) $2 * \frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1) - \frac{3n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.
Nu nog bewijzen dat $S(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ inderdaad de oplossing is van de recurrente betrekking. Dit gaat m.b.v. volledige inductie.
(i) $S(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ voldoet inderdaad aan $S(0) = 0$.
(ii) Inductie-aanname: stel dat $S(n)$, de oplossing van de recurrente betrekking, gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n-1)$ voor alle even n met $n < N$ en N even ≥ 2. We moeten nu laten zien dat dan ook $S(N) = \frac{1}{2}N(N-1)$.
Er geldt: $S(N) =$ (recurrente betrekking) $S(N-2) + 2N - 3 =$ (inductie-aanname) $\frac{1}{2}(N-2)(N-3) + 2N - 3 = \frac{1}{2}N^2 - \frac{5}{2}N + 3 + 2N - 3 = \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N = \frac{1}{2}N(N-1)$. QED