Derde huiswerkopgave Complexiteit 2023
Inleveren: uiterlijk dinsdag 9 mei 23u59
Hoe: PDF op Brightspace
Maak de uitwerking in LaTeX!

Geef een *duidelijke* toelichting/uitleg bij al je antwoorden!

We bekijken in deze opgave de volgende twee beslissingsproblemen:

MaxIndependentSetColouring (MISC): Gegeven een ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$, waarvan de knopen zwart of wit zijn gekleurd. V bevat dus de knopen samen met hun kleur.
Vraag: bestaat er een maximaal onafhankelijke knoopverzameling I ($I \subseteq V$) die alleen maar zwarte knopen bevat?

Een deelverzameling I van de knopen V heet *onafhankelijk* als geldt: voor alle $i, j \in I$ is er *geen* tak tussen i en j. Zo'n onafhankelijke verzameling noemen we *maximaal* als er geen knopen meer aan kunnen worden toegevoegd zonder dat de onafhankelijkheidseigenschap verloren gaat.

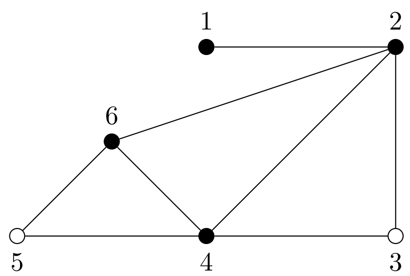
SAT: Gegeven een logische formule ϕ in CNF (conjunctieve normaalvorm).
Vraag: bestaat er een waardering (waarheidstoekenning) van de in ϕ voorkomende variabelen x_i, zodanig dat ϕ wordt waargemaakt, dat wil zeggen dat per clausules minstens één literal waar is?

Een logische formule ϕ staat in CNF als ϕ een conjunctie ($\wedge$) is van clausules, waarbij elke clausule een disjunctie ($\vee$) is van één of meer literals. Een literal is een logische variabele x_i of zijn ontkenning $\neg x_i$.

Voorbeeld: Laat $\mathcal{G}$ zijn zoals hieronder, met de knopen zwart of wit gekleurd. Dan is $I = \{1, 4\}$ een maximaal onafhankelijke knoopverzameling die bestaat uit alleen zwarte knopen. Deze graaf is dus een ja-instantie voor MISC.

Merk verder op:

- $I = \{1, 6\}$ is wel onafhankelijk, maar niet maximaal. Hij kan namelijk worden uitgebreid met knoop 3 tot de onafhankelijke knoopverzameling $\{1, 3, 6\}$.
- $I = \{1, 3, 6\}$ is wel maximaal onafhankelijk, maar bevat zowel zwarte als witte knopen.

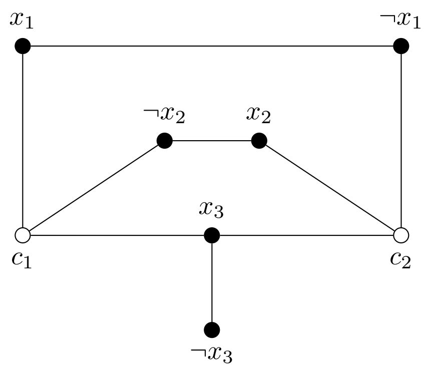


a. (10 punten)
Toon aan dat MISC $\in \mathcal{NP}$ door een *niet-deterministisch polynomiaal* algoritme te geven voor MISC. Het algoritme heeft dus als invoer een ongerichte graaf $\mathcal{G}$ met zwarte en witte knopen en moet "ja" opleveren dan en slechts dan als $\mathcal{G}$ een ja-instantie is (&). Leg onder andere uit wat in elke fase van het algoritme gebeurt, en in het bijzonder wat in fase 2 wordt gecontroleerd en hoe, en een bovengrens voor het aantal stappen dat dat kost. Leg ook uit waarom je algoritme voldoet aan (&) en waarom het polynomiaal is.

We definiëren een transformatie T die instanties van SAT transformeert naar instanties van MISC. Gegeven is een logische formule ϕ in CNF. We construeren hieruit een ongerichte graaf $\mathcal{G}_\phi$, waarvan de knopen wit of zwart zijn gekleurd. We mogen wel aannemen dat het aantal verschillende logische variabelen dat voorkomt in ϕ bekend is[1] en gelijk is aan n.

Maak nu $2n$ zwarte knopen, corresponderend met de n variabelen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en hun negaties (dus alle mogelijke literals). Voor elke clausule uit ϕ introduceren we een witte knoop. Elke witte knoop verbinden we met de (zwarte) knopen die corresponderen met de in de betreffende clausule voorkomende literals. Tevens verbinden we twee zwarte knopen als ze corresponderen met complementaire literals (x_i en $\neg x_i$). Definieer nu $T(\phi) = \mathcal{G}_\phi$.

Voorbeeld: $\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) = c_1 \wedge c_2$ wordt afgebeeld op $\mathcal{G}_\phi$:



b. (5 punten)
Laat zien dat de constructie van $T(\phi)$ uit ϕ polynomiaal is begrensd, dus in $O(|\phi|^k)$ stappen kan (voor zekere $k \geq 0$).

In **c** en **d** samen wordt aangetoond dat geldt: er is een waardering w van de x_i die ϕ waarmaakt $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}_\phi$ heeft een maximaal onafhankelijke knoopverzameling I die alleen bestaat uit zwarte knopen. Met andere woorden: ϕ is een ja-instantie van SAT $\Leftrightarrow$ $T(\phi)$ is een ja-instantie van MISC.
Uit **b**, **c** en **d** volgt dan: SAT $\leq_{\mathsf{P}}$ MISC.

[1] Dit kan immers in polynomiale tijd worden berekend.

c. (5 punten)
Bewijs: als er een waardering w van de x_i bestaat die ϕ waarmaakt, dan heeft $\mathcal{G}_\phi$ een maximaal onafhankelijke knoopverzameling I die alleen zwarte knopen bevat.
Hint. Neem als knoopverzameling de knopen in $\mathcal{G}_\phi$ die corresponderen met de literals waarop w True is en laat zien dat dit een maximaal onafhankelijke knoopverzameling is (met alleen zwarte knopen).

d. (5 punten)
Bewijs: als $\mathcal{G}_\phi$ een maximaal onafhankelijke knoopverzameling I heeft die alleen zwarte knopen bevat, dan is er een waardering w van de x_i die ϕ waarmaakt.
Hint. Toon eerst het volgende aan (bijvoorbeeld uit het ongerijmde):
Gegeven een ongerichte graaf met zwarte en witte knopen. Als I een maximaal onafhankelijke knoopverzameling is en alleen zwarte knopen bevat, dan is elke witte knoop verbonden met ten minste één (zwarte) knoop uit I.
Gebruik dit vervolgens om een waardering w van de x_i te definiëren die goedgedefinieerd is en ϕ waarmaakt. Een waardering is goedgedefinieerd als hij nooit een variabele en zijn negatie beide waarmaakt.

e. (10 punten)
Van college is bekend dat SAT $\in \mathcal{NPC}$ en uit **a** dat MISC $\in \mathcal{NP}$. Tevens weten we inmiddels dat SAT $\leq_{\mathsf{P}}$ MISC. Verder bekijken we het volgende beslissingsprobleem (zie ook de opgaven in het dictaat):

DNFSAT: Gegeven een logische formule ϕ in DNF (disjunctieve normaalvorm). Bestaat er een waardering van de in ϕ voorkomende logische variabelen die ϕ waarmaakt? Een formule staat in disjunctieve normaalvorm als hij bestaat uit een disjunctie ($\vee$) van conjuncties ($\wedge$).

Beantwoord de volgende vragen en leg je antwoord uit. Bij (i) en (ii) wordt alleen gevraagd naar het bestaan. Je hoeft dus geen reductie te geven.

(i) Bestaat er ook een polynomiale reductie van MISC naar SAT, ofwel: is MISC $\leq_{\mathsf{P}}$ SAT?

(ii) Bestaat er een polynomiale reductie van MISC naar DNFSAT?

(iii) Is MISC NP-volledig?

Formuleer duidelijk eventueel gebruikte stellingen.