# Complexiteit 2023 — Opgave 3 (uitwerking)

11 mei 2023

**a.**

We geven een niet-deterministisch polynomiaal algoritme $A$ voor MISC, bestaande uit de gebruikelijke drie fasen. Hierin gokken we een oplossing, d.w.z., een maximaal onafhankelijke knoopverzameling die bestaat uit alleen zwarte knopen.

Laat $V = \{1, \ldots, n\}$.

1. Fase 1 (gokfase)

   Er wordt een string $s$ gegenereerd, hierna te interpreteren als een rij gehele getallen. Deze zou een maximaal onafhankelijke knoopverzameling met alleen zwarte knopen moeten voorstellen; dit wordt gecontroleerd in fase 2. Het genereren van $s$ kan in $O(|s|)$.

2. Fase 2 (verificatiefase)

   De volgende controles worden uitgevoerd:

   (a) alle knopen in $s$ moeten in $V$ zitten. M.a.w.: voor elk getal $s_i$ in $s$ moet gelden dat $1 \leq s_i \leq n$. Dit kan in $O(|s|)$.

   (b) $s$ mag geen dubbele knopen bevatten, anders is het geen (deel)verzameling. Kijk of alle paren knopen in $s$ verschillend zijn. Dit kan in $O(|s|^2)$.

   (c) alle knopen in $s$ moeten zwart zijn. Dit nagaan kan in $O(|s|)$.

   (d) er mogen geen takken lopen tussen de knopen in $s$, anders is de knoopverzameling gepresenteerd door $s$ niet onafhankelijk. Kijk voor alle paren knopen in $s$ of de bijbehorende tak niet voorkomt in $E$. Dit kan in $O(|s|^2 \times E)$.

   (e) er moeten takken lopen van knopen in $s$ naar alle knopen buiten $s$, anders is de knoopverzameling niet *maximaal* onafhankelijk. Kijk voor alle knopen in $V$ of ze ofwel ook in $s$ zitten, of dat ze een tak hebben naar een knoop in $s$. Dit kan in $O(|V| \times |s| \times |E|)$.

   Als alle controles positief zijn, retourneert deze fase True. Anders niet, d.w.z., dan retourneert deze fase False of helemaal niets, in het laatste geval bijvoorbeeld vanwege een oneindige loop of door te blijven hangen.

3. Fase 3 (uitvoerfase)

   Als fase 2 True retourneert, wordt "ja" uitgevoerd. Anders is er geen uitvoer. Dit kan in $O(1)$.

Nu geldt: als $\mathcal{G}$ een ja-instantie is van MISC, dan heeft $\mathcal{G}$ een maximaal onafhankelijke knoopverzameling met alleen zwarte knopen. Dan bestaat er dus een string $s$ die een maximaal onafhankelijke knoopverzameling met alleen zwarte knopen voorstelt, namelijk een string $s$ die een deelverzameling voorstelt van $V$ (controles (a) en (b)), met alleen zwarte knopen (controle (c)), zonder takken tussen knopen in de deelverzameling zelf (controle (d)) maar met takken naar elke knoop erbuiten (controle (e)). Deze string $s$ zorgt dus voor True in fase 2 en daarmee "ja" in fase 3. Er is dus *een* executie van $A$ die "ja" als uitvoer geeft, en dus heeft $A$ uitvoer "ja" met invoer $\mathcal{G}$.

Andersom geldt dat, als $\mathcal{G}$ een nee-instantie is van MISC, er geen maximaal onafhankelijke knoopverzameling met alleen zwarte knopen bestaat. Dan bestaat er dus ook geen string $s$ die deze voorstelt (en dus in fase 2 True geeft). Derhalve levert geen enkele executie van $A$ daarop een uitvoer, en in het bijzonder niet de uitvoer "ja".

Hieruit volgt: het antwoord van $A$ voor invoer $\mathcal{G}$ is "ja" $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ is een ja-instantie voor MISC (&).

Verder geldt: als $s$ een goede string voorstelt, dan representeert $s$ een deelverzameling van $V$, dus $|s| \in O(|V|)$. Verder geldt $O(|V|) \subseteq O(|\mathcal{G}|)$ en $O(|E|) \subseteq O(|\mathcal{G}|)$. Dan kan fase 1 in $O(|\mathcal{G}|)$, fase 2 in $O(|\mathcal{G}|^3)$ en fase 3 in $O(1)$. Met andere woorden: voor elke ja-instantie $\mathcal{G}$ bestaat er een executie die dat in $O(|\mathcal{G}|^3)$ stappen doet. $A$ is dus polynomiaal begrensd.

**b.**

We mogen aannemen dat het aantal verschillende logische variabelen in $\phi$ bekend is en gelijk is aan $n$, omdat dit kan worden berekend in polynomiale tijd. Laat deze variabelen $x_1, \ldots, x_n$ zijn.

- het aanmaken van de $2n$ zwarte knopen kan in $O(n)$ door te itereren over de variabelen $x_1, \ldots, x_n$. Dit is polynomiaal in $|\phi|$.
- het aanmaken van de witte knopen kan in $O(|\phi|)$ door te itereren over de clausules in $\phi$.
- het bepalen van de toe te voegen takken tussen zwarte en witte knopen kan in $O(|\phi|)$ door te itereren over $\phi$. De kosten voor toevoegen hangen af van de gekozen representatie, maar dat kan sowieso polynomiaal (in $|\phi|$).
- het bepalen van de toe te voegen takken tussen zwarte knopen onderling kan in $O(n)$ door te itereren over de variabelen $x_1, \ldots, x_n$. Wederom is dit polynomiaal in $|\phi|$.

Elke stap is polynomiaal in $|\phi|$, dus het geheel ook.

**c.**

Gegeven een waardering $w$ van de $x_i$ die $\phi$ waarmaakt. Neem als knoopverzameling $I$ de knopen in $\mathcal{G}_\phi$ die corresponderen met de literals waarop $w$ True is. Deze vormen een deelverzameling van de knopen in $\mathcal{G}_\phi$ met alleen zwarte knopen. Resteert om aan te tonen dat $I$ maximaal onafhankelijk is.

Tussen zwarte knopen loopt alleen een tak als de twee bijbehorende literals elkaar complement zijn, dus als ze twee verschillende waarderingen voorstellen van dezelfde variabele. In een waardering $w$ heeft elke variabele precies één waarde, dus $I$ kan geen paar knopen bevatten die elkaars complement voorstellen. Er lopen dus geen takken tussen de knopen in $I$: $I$ is een onafhankelijke deelverzameling.

$w$ geeft elke variabele een waarde, dus $I$ bevat precies $n$ zwarte knopen. De resterende $n$ zwarte knopen zijn de complementen van de knopen in $I$, dus deze hebben elk een tak naar een knoop in $I$ (namelijk naar hun complement). De witte knopen in $\mathcal{G}_\phi$ stellen de clausules in $\phi$ voor en zijn verbonden met de literals die erin voorkomen. $w$ maakt $\phi$ waar, dus uit elke clausule moet minstens één literal waar zijn. Voor elke witte knoop is er dus minstens één verbonden zwarte knoop (namelijk van die waarmakende literal) die in $I$ zit. $I$ is dus maximaal onafhankelijk.

**d.**

Gegeven een maximaal onafhankelijke knoopverzameling $I$ met alleen zwarte knopen in $\mathcal{G}_\phi$. We tonen eerst aan dat elke witte knoop in $\mathcal{G}_\phi$ dan is verbonden met een zwarte knoop in $I$. Stel dat dit niet zo zou zijn: dan zou er een witte knoop bestaan die niet is verbonden met een zwarte knoop in $I$. Deze zouden we dan kunnen toevoegen aan $I$ zonder de onafhankelijkheid te schenden, dus dan zou $I$ niet maximaal onafhankelijk zijn. Dit is een tegenspraak. We mogen dus aannemen dat elke witte knoop in $\mathcal{G}_\phi$ is verbonden met minstens één zwarte knoop uit $I$.

Neem als waardering $w$ True voor de bijbehorende literals van de knopen die voorkomen in $I$ en False voor de bijbehorende literals van de knopen die niet voorkomen in $I$.

Vanwege de constructie lopen er takken tussen zwarte knopen die elkaars complement voorstellen. $I$ is onafhankelijk, dus $w$ geeft elke variabele hooguit één waarde. Omdat $I$ maximaal onafhankelijk is, geeft $w$ elke variabele ook minstens één waarde: er lopen immers geen takken tussen zwarte knopen die bij verschillende variabelen horen, dus als er een variabele zou ontbreken zou $I$ niet maximaal onafhankelijk zijn. Met andere woorden: $w$ is goedgedefinieerd.

Verder weten we dat elke witte knoop in $I$ is verbonden met minstens één zwarte knoop uit $I$. Voor elke clausule in $\phi$ is er dus minstens één literal waar. Omdat dit zo is voor elke clausule, wordt de hele formule $\phi$ waargemaakt door $w$.

**e.**

(i) SAT is NP-volledig en dus (per definitie, zie hoofdstuk 10.5.3 van het dictaat) ook NP-hard. Dit wil zeggen dat elk probleem in $\mathcal{NP}$ polynomiaal reduceert naar SAT. MISC $\in \mathcal{NP}$, dus MISC $\leq_{\mathsf{P}}$ SAT.

(ii) In opgave 61 van het dictaat wordt aangetoond dat DNFSAT $\in \mathcal{P}$. In het bijzonder weten we niet of DNFSAT NP-hard is, dus er kan niet direct worden gezegd of MISC $\leq_{\mathsf{P}}$ DNFSAT. (Waarschijnlijk niet, omdat het bestaan i.c.m. (iii) zou impliceren dat $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, maar er kan dus ook niet direct worden geconcludeerd dat er geen reductie bestaat.)

(iii) Het college en dictaat bevatten een stelling (hoofdstuk 10.5.3) dat, als $Q \in \mathcal{NP}$ en $P \in \mathcal{NPC}$ en $P \leq_{\mathsf{P}} Q$ dan $Q \in \mathcal{NPC}$. We weten dat MISC $\in \mathcal{NP}$ (opgave a), SAT $\in \mathcal{NPC}$ (college / gegeven) en SAT $\leq_{\mathsf{P}}$ MISC (opgaven b, c en d), dus uit de stelling volgt dan dat MISC $\in \mathcal{NPC}$.