

Tweede huiswerkgave Complexiteit 2023
Inleveren: uiterlijk maandag 27 maart 11u59
Hoe: PDF op Brightspace
Maak de uitwerking in \LaTeX !

Geef een *duidelijke toelichting/uitleg* bij al je antwoorden!

Gegeven is een array $A = A[1], \dots, A[n]$ met $n = 2^k$ ($k \geq 1$, geheel), gevuld met gehele getallen ($\neq 0$). Op de oneven posities staan positieve (> 0) getallen, op de even posities negatieve (< 0) getallen. Gezien de structuur van het array kun je bij voorbaat al iets zeggen over het maximale, respectievelijk minimale aantal inversies. Hierbij is een inversie, zoals gebruikelijk, gedefinieerd als een paar $(A[i], A[j])$ met $i < j$ en $A[i] > A[j]$.

a. (4 punten)

Hoeveel inversies bevat een array van bovengenoemde vorm maximaal? Geef voor algemene n een beschrijving van het soort rijtjes dat dat maximale aantal inversies heeft en geef een concreet voorbeeld (ook voor algemene n).

b. (3 punten)

Dezelfde vraag als **a.**, maar nu voor het minimale aantal inversies.

c. (3 punten)

Stel dat we het array olopend willen sorteren met behulp van Bubblesort. Hoeveel arrayvergelijkingen zijn dan in de worst case ten minste nodig? Gebruik wat je bij college hebt geleerd en vergeet je uitleg niet.

We willen nu weten hoeveel inversies een gegeven rij van bovenstaande type bevat. We bekijken een algoritme dat dit als volgt berekent. Voor $n > 2$ wordt eerst *recursief* het aantal inversies in de eerste helft van A bepaald, en vervolgens evenzo in de tweede helft. Ten slotte moeten nog paren $(A[i], A[j])$ worden bekeken met $A[i]$ in de linkerhelft en $A[j]$ in de rechterhelft van het array.

Het algoritme doet **geen** overbodige vergelijkingen!

d. (4 punten)

Laat $T(n)$ het aantal arrayvergelijkingen zijn dat dit algoritme doet. Leg uit waarom $T(n)$ voldoet aan de volgende recurrente betrekking:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{8}n^2 & n \geq 4, n = 2^k \end{cases}$$

Leg ook uit hoe je komt aan de beginvoorwaarde en de term $\frac{1}{8}n^2$.

e. (10 punten)

Los de recurrente betrekking uit **d.** op door deze herhaald in te vullen in zichzelf en bewijs met behulp van volledige inductie dat de aldus gevonden oplossing (uitgedrukt in n) inderdaad voldoet. *Hint* bij het uitrekenen: gebruik dat $n = 2^k$ en dat:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^\ell} \quad (\text{meetkundige reeks})$$

f. (8 punten)

Gebruik een beslissingsboomargument om een ondergrens te geven voor het aantal arrayvergelijkingen dat elk algoritme (gebaseerd op arrayvergelijkingen) moet doen om het aantal inversies te bepalen in een array van bovengenoemd type. Geef duidelijk aan waar de knopen en eventueel de bladeren van de beslissingsboom in dit geval voor staan, en welke stelling je gebruikt.