Complexiteit 2023 — Opgave 2 (uitwerking)

a.

We zoeken het maximale aantal paren $(A[i], A[j])$ zodat $i < j$ en $A[i] > A[j]$. Als $i < j$ kunnen we de volgende gevallen onderscheiden:

- i is even en j is oneven: dan geldt $A[i] < 0 < A[j]$, dus dit is nooit een inversie.
- i is oneven en j is even: dan geldt $A[j] > 0 > A[i]$, dus dit is altijd een inversie. Er zijn $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k = \frac{1}{2} \times \frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1) = \frac{n}{8}(n + 2)$ paren die hieraan voldoen (d.w.z. met $i < j$ met oneven i en even j).
- i is even en j is even: dit is mogelijk een inversie. Er zijn $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k = \frac{1}{2} \times \frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{8}(n - 2)$ paren die hieraan voldoen (d.w.z. met $i < j$ met even i en even j).
- i is oneven en j is oneven: dit is mogelijk een inversie. Er zijn $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k = \frac{1}{2} \times \frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{8}(n - 2)$ paren die hieraan voldoen (d.w.z. met $i < j$ met oneven i en oneven j).

We zijn op zoek naar het maximale aantal inversies. Dat is dan $\frac{n}{8}(n + 2) + \frac{n}{8}(n - 2) + \frac{n}{8}(n - 2) = \frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{4}n$ als alle paren $(A[i], A[j])$ waarbij i en j allebei even of allebei oneven zijn, ook een inversie opleveren. M.a.w.: de deelrijtjes $A[1], A[3], A[5], \ldots, A[n-1]$ en $A[2], A[4], A[6], \ldots, A[n]$ zijn beide aflopend gesorteerd.

Een concreet voorbeeld hiervan voor algemene n is het rijtje $\frac{n}{2}, -1, \frac{n}{2}-1, -2, \frac{n}{2}-2, -3, \ldots, 2, -\frac{n}{2}+1, 1, -\frac{n}{2}$.

b.

Analoog aan **a.**: het minimale aantal inversies is $\frac{n}{8}(n+2) = \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n$ als alle paren $(A[i], A[j])$ waarbij i en j allebei even of allebei oneven zijn, géén inversie opleveren. M.a.w.: de deelrijtjes $A[1], A[3], A[5], \ldots, A[n-1]$ en $A[2], A[4], A[6], \ldots, A[n]$ zijn beide oplopend gesorteerd.

Een concreet voorbeeld hiervan voor algemene n is het rijtje $1, -\frac{n}{2}, 2, -\frac{n}{2} + 1, 3, -\frac{n}{2} + 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1, -2, \frac{n}{2}, -1$.

c.

Bubblesort sorteert met buurverwisselingen, dus per vergelijking wordt hooguit er één inversie opgeheven. In de worst case hebben we dus minstens het aantal inversies nodig aan vergelijkingen, dus $\frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{4}n$ (zie opgave **a.**).

Alternatief (zie opgave 6 van het dictaat, uitwerking op de website): elk element dat te veel naar rechts staat (te klein is) wordt door Bubblesort, per iteratie, één plaats naar links verschoven. Om het maximale aantal vergelijkingen af te dwingen, moet er in de eerste $n-2$ iteraties altijd iets worden verschoven (anders stopt het algoritme eerder). M.a.w.: er moet een element zijn dat minstens $n-2$ plaatsen te veel naar rechts staat. Dit kan alleen $A[n-1]$ of $A[n]$ zijn. Dit is in ons specifieke geval te realiseren als $A[n-1]$ het kleinste is van alle positieve getallen en/of als $A[n]$ het kleinste is van alle negatieve getallen. In beide gevallen levert dit $\frac{1}{2}n(n-1)$ vergelijkingen op.

d.

Als $n = 2$ weten we al dat $A[1] > A[2]$, want $A[1]$ is een oneven positie en dus positief en $A[2]$ is een even positie en dus negatief. Hier doen we dus 0 vergelijkingen.

Als $n > 2$ (en dus $n \geq 4, n = 2^k$ omdat n een tweemacht is), hebben we twee keer een recursieve aanroep op een rijtje ter grootte $\frac{n}{2}$. Dit geeft $2T(\frac{n}{2})$. Daarna moeten we nog inversies bepalen waarbij $A[i]$ in de linkerhelft zit en $A[j]$ in de rechterhelft. We hoeven alleen elementen te vergelijken op posities met dezelfde pariteit (i en j allebei even of allebei oneven); als i even is en j oneven weten we immers al dat $A[i] < A[j]$ en als i oneven is en j even weten we al dat $A[i] > A[j]$. Dit geeft nog eens $2 \times \frac{n}{4} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{8}n^2$ vergelijkingen. Samen is dat dus $2T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{8}n^2$.

e.

Herhaald invullen geeft:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{8}n^2 && \text{(invullen)} \\
&= 2(2T(\frac{n}{4}) + \frac{1}{8}(\frac{n}{2})^2) + \frac{1}{8}n^2 && \text{(invullen)} \\
&= 4T(\frac{n}{4}) + \frac{1}{16}n^2 + \frac{1}{8}n^2 && \text{(herschrijven)} \\
&= 4(2T(\frac{n}{8}) + \frac{1}{8}(\frac{n}{4})^2) + \frac{1}{16}n^2 + \frac{1}{8}n^2 && \text{(invullen)} \\
&= 8T(\frac{n}{8}) + \frac{1}{32}n^2 + \frac{1}{16}n^2 + \frac{1}{8}n^2 && \text{(herschrijven)} \\
&= 8T(\frac{n}{8}) + \frac{1}{8}n^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) && \text{(herschrijven)} \\
&= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + \frac{1}{8}n^2 \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{2^i} && \text{(herschrijven)}
\end{aligned}
$$

Dit doet vermoeden dat de algemene vorm is: $2^\ell T(\frac{n}{2^\ell}) + \frac{1}{8}n^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^i}$. Ons basisgeval is $n = 2$, dus $\frac{n}{2^\ell} = 2$ geeft $n = 2^{\ell+1}$ geeft $\ell + 1 = \lg n$ geeft $\ell = \lg n - 1$.

Dit invullen voor ℓ geeft:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2^{\lg n-1}T(\frac{n}{2^{\lg n-1}}) + \frac{1}{8}n^2 \sum_{i=0}^{\lg n-2} \frac{1}{2^i} \\
&= 2^{\lg n-1}T(2) + \frac{1}{8}n^2 \sum_{i=0}^{\lg n-2} \frac{1}{2^i} && (\tfrac{n}{2^\ell} = 2) \\
&= \frac{1}{8}n^2 \sum_{i=0}^{\lg n-2} \frac{1}{2^i} && (T(2) = 0) \\
&= \frac{1}{8}n^2 \times (2 - \frac{1}{2^{\lg n-2}}) && \text{(zie hint)} \\
&= \frac{1}{8}n^2 \times (2 - \frac{1}{\frac{n}{4}}) && (2^{\lg n-2} = \tfrac{2^{\lg n}}{2^2} = \tfrac{n}{4}) \\
&= \frac{1}{8}n^2 \times (2 - \frac{4}{n}) \\
&= \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n
\end{aligned}
$$

We bewijzen nu met (sterke) volledige inductie dat $T(n) = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Basisgeval: neem $n = 2$.
$T(2) = 0$
$\frac{1}{4} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 = 1 - 1 = 0$

Inductiestap: neem $N = 2^\ell$ $(\ell > 1)$.
Inductiehypothese: voor alle $n = 2^j$ waarvoor $2 \leq n < N$ geldt dat $T(n) = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n$.
Te bewijzen: $T(N) = \frac{1}{4}N^2 - \frac{1}{2}N$

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(\frac{N}{2}) + \frac{1}{8}N^2 && \text{(definitie)} \\
&= 2(\frac{1}{4}(\frac{N}{2})^2 - \frac{1}{2}\frac{N}{2}) + \frac{1}{8}N^2 && \text{(inductiehypothese op } T(\tfrac{N}{2})\text{)} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{N}{2})^2 - \frac{N}{2} + \frac{1}{8}N^2 \\
&= \frac{1}{8}N^2 - \frac{N}{2} + \frac{1}{8}N^2 \\
&= \frac{1}{4}N^2 - \frac{N}{2}
\end{aligned}
$$

Met het basisgeval en de inductiestap is bewezen dat $T(n) = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n$ voor alle $n = 2^k, n \geq 2$.

f.

We construeren een beslissingsboom waarbij de interne knopen arrayvergelijkingen zijn en de bladeren de resultaten, d.w.z. het aantal inversies. Uit vragen **a.** en **b.** volgt dat het minimale resp. maximale aantal inversies gelijk is aan $\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n$ resp. $\frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{4}n$. Er zijn dus minimaal $\frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{4}n - (\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n) + 1 = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

mogelijke uitkomsten en dus minimaal $\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ bladeren in de beslissingsboom. Als h de hoogte van de boom is en b het aantal bladeren, geldt dat $h \geq \lceil \lg b \rceil$, dus $h \geq \lceil \lg(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + 1) \rceil$.

Voor een boom van dit type is het aantal vergelijkingen in de worst case gelijk aan h. M.a.w.: elk algoritme dat op basis van arrayvergelijkingen het aantal inversies bepaalt in een array van het genoemde type, doet er in de worst case ten minste $\lceil \lg(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + 1) \rceil$ vergelijkingen over.

Als je enthousiast bent: je weet dat $n = 2^k$, dus $\frac{1}{4}n^2 = 2^{2k-2}$ en $\frac{1}{2}n = 2^{k-1}$, dus $\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 = 2^{2k-2} - 2^{k-1} + 1$. $k \geq 1$ dus $0 < 2^{k-1} < 2^{2k-1}$. Dan geldt dat $2^{2k-1} < 2^{2k-2} - 2^{k-1} < 2^{2k-2}$ en dan $2^{2k-1} < 2^{2k-2} - 2^{k-1} + 1 \leq 2^{2k-2}$. M.a.w.: $\lceil \lg(2^{2k-2} - 2^{k-1} + 1) \rceil = \lg 2^{2k-2} = 2k - 2 = 2 \lg n - 2$.