Foundations of Computer Science

Fundamentele Informatica 1

Hendrik Jan Hoogeboom
Jeannette de Graaf

Bachelor Informatica (& specialisaties)
Universiteit Leiden

Najaar 2020

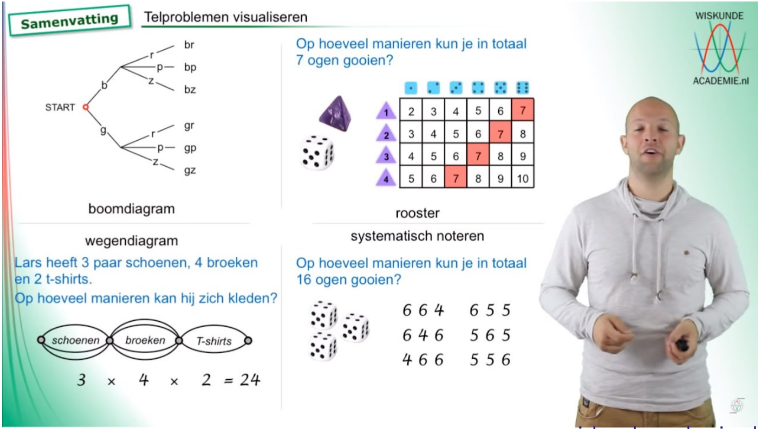
Universiteit Leiden
Leiden Institute of Advanced Computer Science

Hoofdstuk 5

Combinatoriek

leer van het tellen

kansrekening



wiskundeacademie.nl

Chapter 5: Techniques of Counting

eindige A, B

parallel, naast elkaar

somregel

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

sequentieel, na elkaar

productregel

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

n objecten, r keer kiezen

– wel/niet herhaald

– wel/niet geordend   rijtje vs. verzameling

permutaties vs. combinaties

vb. $n = 5$ kleuren, kies $r = 3$

- herhaald, geordend (*rijtje met*) $5 \times 5 \times 5 = 125$
  111, 112, 113, . . . 155, 211, 212, . . . 553, 554, 555
- niet herhaald, geordend (*rijtje zonder*) $5 \times 4 \times 3 = 60$
  123, 124, 125, 134, 135, . . . 352, 354, 412, 413, 415, . . . 542, 543
- niet herhaald, ongeordend (*deelverzameling*) $\binom{5}{3} = 10$
  $\{123\}, \{124\}, \{125\}, \{134\}, \{135\}, \{145\}, \{234\}, \{235\}, \{245\}, \{345\}$
- herhaald, ongeordend (*multiset*) $\binom{7}{3} = 35$
  $\{111\}, \{112\}, \{113\}, \ldots \{225\}, \{233\}, \{234\}, \ldots \{345\}, \{355\}, \{445\}, \{455\}, \{555\}$

tien kandidaten, kies commissie van drie personen

tien kandidaten, kies bestuur (voorzitter, secretaris, penningmeester)

tien kleuren, verf de twaalf deuren in een straat

tien kleuren, verf twaalf houten blokken geordend, met herhaling

kies r keer uit n

$$n^r$$

- $2^3 = 8$ rijtjes $0, 1$ van lengte 3
  000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
- deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$ drie keer niet/wel kiezen
  $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

geordend, zonder herhaling   permutatie

alle n elementen

Cor. 5.5

$n! = \prod_{k=1}^{n} k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

faculteit   factorial $0! = 1$

- $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutaties van $\{1, 2, 3\}$: 123, 132, 213, 231, 312 en 321

Thm. 5.4 r elementen op rij

$$P(n, r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-r+1)}_{r \text{ factoren}} = \frac{n!}{(n-r)!} \, .$$

- $12 = 4 \cdot 3$ rijtjes van twee elementen uit $\{1, 2, 3, 4\}$:
  12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 en 43

ongeordend, zonder herhaling   deelverzameling

kies k elementen uit n

binomiaalcoëfficiënt   *n boven k* (n *choose* k)

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+2}{2}\frac{n-k+1}{1}$$

- $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ twee elementen uit $\{1,2,3,4\}$: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ en $\{3,4\}$.

Lem. 5.1 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$

kies k elementen uit n

binomiaalcoëfficiënt $\quad$ *n boven k* (*n choose k*)

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\,\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+2}{2}\,\frac{n-k+1}{1}$$

zet alle n objecten op rij

$$\overbrace{\underbrace{\boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes}_{k!}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square\ \square}_{(n-k)!}}^{n!}$$

kies de eerste k

volgorde binnen de wel/niet groep geeft zelfde keuze

$\binom{n}{r} = 0$ als $r < 0$ of $r > n$

Thm. 5.3

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

kies n en nog $k-1$ elementen, of

kies n niet, en dan nog k elementen

driehoek van Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\
&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\
&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\
&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\
& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 2 && 1 &&& \\
&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\
& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\
1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$(x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$

Thm. 5.2 *binomium van Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

- $(x+1)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
- neem $x = y = 1$

ongeordend, met herhaling multiset

- vier kleuren M&M, kies er zeven
  111, 112, 115, ...122, 123, ...333, 334, ...355, 444, 445, 555

kies r uit n $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$

$$\underbrace{1\ldots1}_{r_1}0\underbrace{1\ldots1}_{r_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{r_n}$$

- $1011011101 \sim (1,2,3,1)$ $1111011001 \sim (4,2,0,1)$

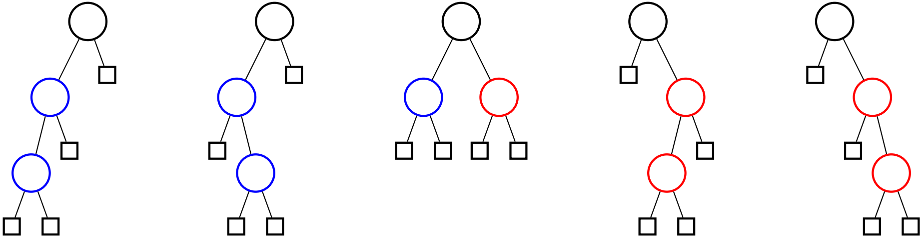
$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

- $\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120$

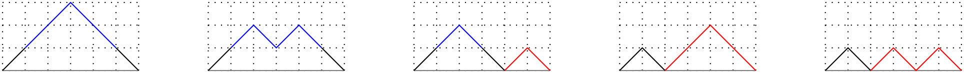
- permutaties "BENZEEN" $\binom{7}{2,3} = \binom{7}{1,1,2,3}$
  $BE_1N_1ZE_2E_3N_2$ 7!

Thm. 5.6

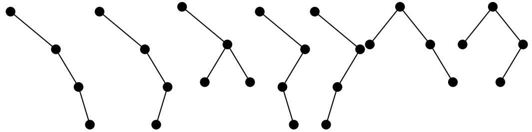
$$P(n; n_1, \ldots, n_r) = \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$$



NNNLLLL	NNLNLLL	NNLLNLL	NLNNLLL	NLNLNLL
$(a+b)+c)+d$	$(a+(b+c))+d$	$(a+b)+(c+d)$	$a+((b+c)+d)$	$a+(b+(c+d)$



((()))	(()())	(())()	()(())	()()()



1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, ...

Catalan getallen⊠ OEIS A108

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \, C_{n-i}$$

Brugge 1814 – Luik 1894

wikipedia

END.

edit 6 december 2020